

---

# TD 17

## Electromagnétisme et induction

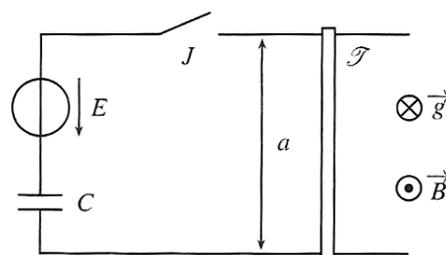
---

### Questions de cours

- Donner la force de Laplace
- Donner le couple ressenti par un dipole magnétique
- Définir le flux du champ magnétique
- Donner la loi de Faraday
- Expliquer la loi de Lenz
- Qu'est ce que le phénomène d'autoinduction
- Qu'est ce l'inductance mutuelle? De quoi dépend-elle?
- Expliquer les courants de Foucault
- Démontrer la relation de conservation de la charge
- Donner l'expression de la Force de Lorentz ainsi que son expression volumique
- Donner les équations de Maxwell
- A l'aide des équations de Maxwell, redémontrer l'équation de conservation de la charge, le théorème de Gauss, le théorème d'Ampère, la conservation du flux de B, l'équation de propagation de d'Alembert pour E et pour B
- Démontrer l'équation de Laplace, que devient cette équation dans le vide?
- Démontrer l'expression de la puissance volumique fournit par le champ EM au milieu
- Donner la loi d'Ohm locale
- Donner des ordres de grandeurs de conductivité
- Définir la densité volumique d'énergie électromagnétique, donner son expression
- Définir le vecteur de Poynting, donner son expression
- Effectuer un bilan d'énergie et en déduire la relation locale de conservation de l'énergie électromagnétique

### Induction

#### Exercice 1 - Tige qui glisse sur un circuit capacitif - ♥♥♥/ ★



Une tige conductrice  $\mathcal{T}$  glisse sur deux rails horizontaux distants de  $a$ . Elle ferme électriquement un circuit comprenant un interrupteur  $J$ , un condensateur de capacité  $C$  et un générateur de f.é.m. constante  $E$ . la tige  $\mathcal{T}$  a une résistance électrique  $R$  et une masse  $m$ . L'autoinductance du circuit sera négligée.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique et de pesanteur uniformes et stationnaires.

On ferme l'interrupteur  $J$  à l'instant initial alors que la tige est immobile.

1. Établir une équation électrique et une équation mécanique décrivant le circuit.
2. Établir et intégrer une équation différentielle sur l'intensité du courant dans le circuit pour montrer qu'il s'écrit sous la forme

$$i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Identifier les valeurs de  $i_0$  et  $\tau$ .

3. En déduire que la vitesse  $v(t)$  de la tige se met sous la forme

$$v(t) = v_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

4. Calculer l'énergie  $\mathcal{E}_G$  fournie par le générateur entre les instants initial ( $t = 0$ ) et final ( $t \rightarrow \infty$ ), en fonction de  $E$ ,  $\tau$  et  $R$ .
5. Calculer  $u_C(t)$ .
6. Calculer l'énergie  $\mathcal{E}_C$  emmagasinée par le condensateur entre les instants initial et final.
7. Calculer l'énergie  $\mathcal{E}_J$  dissipée par effet Joule entre les instants initial et final.
8. Calculer le travail  $W$  des forces de Laplace entre les instants initial et final.
9. Quelle relation existe-t-il entre  $\mathcal{E}_G$ ,  $\mathcal{E}_C$ ,  $\mathcal{E}_J$  et  $W$ ? L'interpréter.

### Exercice 2 - Autoinductance d'une bobine - ♥♥♥/ ★

A partir de l'expression du champ magnétique créée par une bobine de  $N$  spires, de longueur  $l$  et de section  $S$  parcourue par un courant  $I$  déterminer le coefficient d'autoinduction  $L$  de la bobine.

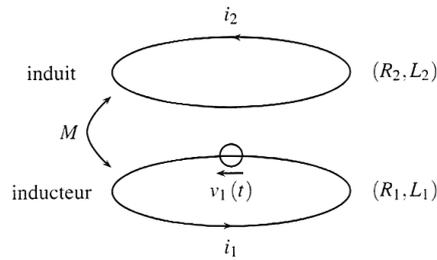
### Exercice 3 - Table à induction - ♥♥/ ★★

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé l'inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même, située au fond d'une casserole.

L'inducteur, de 5 cm de rayon, comporte 20 spires de cuivre de résistance électrique  $R_1 = 1,8 \cdot 10^{-2} \Omega$  et d'autoinductance  $L_1 = 30 \mu\text{H}$ .

La plaque de résistance  $R_2 = 8,3 \text{ m}\Omega$  et d'auto-inductance  $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$ , nommé l'induit, est assimilable à une spire unique refermée sur elle-même. L'inducteur est alimenté par une tension  $v_1(t)$ . L'ensemble plaque (induit)-inducteur se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle  $M$ .



1. Écrire les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre  $i_1$  et  $i_2$ ).
2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes  $\frac{I_2}{I_1}$ .
3. En déduire l'expression littérale de l'impédance d'entrée complexe du système :  $Z_e = \frac{V_1}{I_1}$ .
4. On choisit  $\omega$  telle que  $R_1 \ll L_1\omega$  et  $R_2 \ll L_2\omega$ . Simplifier les deux expressions littérales précédentes, puis effectuer le calcul numérique de leur module, sachant que l'inductance mutuelle est estimée à  $M = 2 \mu\text{H}$ .
5. On soulève la plaque à chauffer ; on demande un raisonnement purement qualitatif. L'amplitude du courant  $i_1$  appelé par l'inducteur augmente-t-il ou décroît-il ?

## Electromagnétisme

### Exercice 4 - Bilan d'énergie dans un milieu ohmique - ♥♥/ ★★

L'espace compris entre les plans  $z = -\frac{a}{2}$  et  $z = \frac{a}{2}$  est rempli d'un milieu conducteur ohmique, de conductivité  $\gamma$  parcouru par une densité volumique de courant uniforme et constante  $\vec{j}(M) = j\vec{u}_x$ .

1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par cette distribution en un point  $M$ . En déduire  $\vec{B}(M)$  à l'intérieur du milieu conducteur en intégrant l'une des équations de Maxwell.
2. Exprimer le vecteur de Poynting, la densité volumique d'énergie électromagnétique, la puissance volumique dissipée dans le conducteur.
3. Faire un bilan d'énergie électromagnétique pour le volume parallélépipédique  $[x, x + dx] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ .

### Exercice 5 - Effet Meissner dans une plaque supraconductrice - ♥/ ★★★

Dans un matériau supraconducteur, il existe une densité volumique de courant  $\vec{j}$  liée au champ magnétique  $\vec{B}$  par la relation  $\text{rot} \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$  (appelée *équation de London*), où  $\lambda$  est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite en tout point intérieur au matériau par le champ magnétique  $\vec{B}$ , en régime statique.  
On rappelle la relation  $\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ .

2. On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur  $2d$ , dont les faces sont de dimensions très grandes devant  $d$  pour pouvoir négliger les effets de bord. On choisit l'origine d'un repère orthonormé direct  $(Oxyz)$  au milieu de la plaque, l'axe  $(Oz)$  étant perpendiculaire à ses faces qui ont pour équation  $z = -d$  et  $z = +d$ . Cette plaque est plongée dans un champ magnétique, qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme, égal à  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_x$ .
  - (a) Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur de la plaque en supposant que  $\vec{B}(d) = \vec{B}(-d) = \vec{B}_0$ .
  - (b) En déduire le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  à l'intérieur de la plaque.
3. Un modèle microscopique donne  $\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}$ , où  $m$  est la masse de l'électron,  $e$  la charge élémentaire et  $n_s$  la densité volumique d'électrons supraconducteurs. On donne  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ ,  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  et  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .
  - (a) Calculer  $\lambda$  pour  $n_s = 1,0 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$ .
  - (b) Tracer les graphes des composantes non nulles de  $\vec{B}$  et  $\vec{j}$  en fonction de  $z$ .
  - (c) Calculer l'épaisseur minimale  $2d_m$  de la plaque pour que le champ en son milieu soit inférieur à  $B_0/100$ .
  - (d) Pour  $d \gg \lambda$ , à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à un centième de sa valeur à la surface ?

### Exercice 6 - Non covariance des équations de Maxwell par changement de référentiel - ♥♥♥/★★

Considérons un observateur attaché à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  et une particule  $P$  de charge  $q$  soumise à l'action du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  vu depuis  $\mathcal{R}$ . Soit  $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$  un autre référentiel galiléen, animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , à la vitesse  $\vec{V}_e = V_e \vec{e}_x$ .

1. Rappeler les transformations galiléennes des coordonnées d'espace et des vitesses ainsi que leur cadre de validité.
2. Sachant qu'en mécanique classique, la charge, comme la force de Lorentz sont invariantes par changement de référentiel, établir la transformation galiléenne des champs :

$$\begin{cases} \vec{B}' = \vec{B} \\ \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V}_e \wedge \vec{B} \end{cases}$$

3. Montrer que la transformation galiléenne des champs est incompatible avec la relation de Maxwell-Gauss. La transformation galiléenne des champs vous paraît-elle compatible avec le principe de relativité ?
4. Pour "sauver" la compatibilité des équations de Maxwell avec la cinématique, on doit renoncer à l'hypothèse de temps absolue que sous-tend la cinématique classique. On introduit alors la transformation de Lorentz-Poincaré :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

avec  $\beta = \frac{V_e}{c}$  et  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ .

On considère à l'instant  $t$  une charge élémentaire  $dq$  occupant le volume  $d\tau = dx dy dz$  autour du point  $P$  animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}(P/\mathcal{R}) = V_e \vec{e}_x$ .

Compte tenu de la transformation de Lorentz-Poincaré donnée ci-dessus, exprimer la densité volumique de charge  $\rho$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en fonction de la densité volumique de charge  $\rho'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  attaché à la charge en mouvement. Commenter.

**Exercice 7 - Effet de striction des filets de courant - ♥♥/ ★★**

Deux fils parallèles parcourus par des courants de même sens s'attirent sous l'action des forces magnétiques. Le même effet d'attraction se manifeste entre les filets infinitésimaux de courant à l'intérieur d'un conducteur, modifiant ainsi la répartition de courant, usuellement supposée uniforme sur toute la section du fil.

On considère un conducteur cylindrique d'axe  $(Oz)$ , de longueur infinie et de rayon  $a$ . Il contient  $n_0$  charges positives  $q$  par unité de volume et  $n$  porteurs de charges mobiles, de charge  $-q$ , animés d'une vitesse  $\vec{v} = v \vec{e}_z$  uniforme et stationnaire par rapport au conducteur, orientée selon l'axe du conducteur. On propose de déterminer la densité volumique non uniforme de porteurs de charges  $n(r)$  en régime stationnaire.

1. Donner les expressions de la densité volumique de courant  $\vec{j}$  et de la densité volumique totale de charge  $\rho$  qui décrivent cette distribution. Vérifier l'équation locale de conservation de la charge électrique.
2. Écrire les équations fondamentales vérifiées par les champs électrique et magnétique en un point du faisceau de charges mobiles. On précisera l'orientation des champs électrique et magnétique en un point  $M$  à l'intérieur du conducteur.
3. En étudiant le mouvement d'un porteur de charge, de vitesse  $\vec{v}$  uniforme et stationnaire, exprimer la densité volumique de porteurs de charges mobiles  $n(r)$  dans le faisceau en fonction de  $n_0$  et  $\beta = \frac{v}{c}$ . On utilisera le formulaire donné en fin d'énoncé.
4. En écrivant la neutralité électrique d'une tranche  $dz$  de conducteur, montrer que l'expression de la densité  $n(r)$  est non nulle seulement pour  $r \leq b$ . On exprimera  $b$  en fonction de  $a$  et  $\beta$ .
5. *Application numérique* : Pour un fil de cuivre métallique, de section  $S = 1,0 \text{ mm}^2$ , parcouru par un courant d'intensité  $I = 10 \text{ A}$ , évaluer  $a - b$ . Commenter le résultat obtenu.

*Données* : masse volumique du cuivre  $\mu = 8,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  ; masse molaire  $M = 64 \text{ g mol}^{-1}$ .  
On considèrera que chaque atome de cuivre apporte un électron de conduction.

Formulaire : En coordonnées cylindriques, de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$$\text{div } \vec{A}(M) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A}(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

### Exercice 8 - Cylindre dans un four à induction - ♥♥/ ★★

Un cylindre de rayon  $a$ , hauteur  $h$  et d'axe  $(Oz)$ , constitué d'un métal ohmique de conductivité  $\gamma$ , est plongé dans un champ magnétique uniforme variable :  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ , où  $B_0$  et  $\omega$  sont des constantes. On suppose que le champ magnétique n'est pas modifié par la présence du cylindre.

1. Justifier l'existence d'un champ électrique à l'intérieur du cylindre de la forme  $\vec{E} = E(r, z, t) \vec{u}_\theta$ , en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $(Oz)$ . En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale à un cercle quelconque d'axe  $(Oz)$ , déterminer  $E(r, z, t)$ . En déduire la densité de courant volumique dans le cylindre.
2. Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.
3. Trouver l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par les courants qui se développent dans le cylindre. En déduire une condition pour que l'hypothèse faite dans l'énoncé soit valable.

### Exercice 9 - Décharge d'un conducteur dans l'air - ♥♥♥/ ★★

Une boule conductrice, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , porte initialement la charge  $Q_0$  uniformément répartie sur sa surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité  $\gamma$  et initialement localement neutre :  $\rho(M, t = 0) = 0$  en tout point  $M$  à l'extérieur de la boule.

On cherche le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  en un point  $M$  de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre  $O$ .

1. Déterminer  $\vec{E}(M, t = 0)$  à l'extérieur de la boule.
2. Déterminer  $\vec{B}(M, t)$  à l'extérieur de la boule.
3. En utilisant l'identité de Poynting,  $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ , trouver le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  à l'extérieur de la boule.
4. Montrer que  $\rho(M, t) = 0$  à l'extérieur de la boule.
5. Déterminer la charge  $Q(t)$  portée par la boule à l'instant  $t$ .
6. Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu entre les instants  $t = 0$  et  $t = \infty$ . Commenter.

### Éléments de réponse

1. (a) EE :  $E - aBv = R - +u_C$  ; EM :  $m \frac{dv}{dt} = iaB$ .
- (b)  $i_0 = \frac{E}{R}$  et  $\tau = \frac{mRC}{m + C(aB)^2}$ .
- (c)  $v(t) = \frac{aB}{m\tau} \frac{E}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$ .
- (d)  $\mathcal{E}_G = \frac{E^2 \tau}{R}$ .
- (e)  $u_C(t) = \frac{E\tau}{RC} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$ .
- (f)  $\mathcal{E}_C = \frac{E^2 \tau^2}{2R^2 C}$ .

- (g)  $\mathcal{E}_J = \frac{E^2 \tau}{2R}$ .
- (h)  $W = \frac{a^2 B^2 E^2}{2m\tau R^2}$ .
- (i)  $\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_J + W$ .
2.  $L = \mu_0 N^2 S / l$
3. (a) 
$$\begin{cases} v_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ 0 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \end{cases}$$
- (b)  $\frac{I_2}{I_1} = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$ .
- (c)  $\underline{Z}_e = R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega}$ .
- (d) 
$$\begin{cases} \frac{I_2}{I_1} &= -\frac{M}{L_2} \\ \underline{Z}_e &= jL_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right) \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \frac{I_2}{I_1} &= -8,3 \\ |\underline{Z}_e| &= 2,1 \Omega \end{cases}$$
- (e)  $Z_e$  augmente.
4.  $\vec{B}(M) = -\mu_0 j z \vec{u}_y$ ;  $\vec{\Pi} = -\frac{j^2}{\gamma} z \vec{u}_z$ ;  $\frac{dU_{em}}{dt} + \Phi_{\Pi} = -\mathcal{P}_{perdue}$ .
5.  $\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$ ;
- $$\vec{B} = B_0 \frac{\cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{u}_x; \vec{j} = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} \frac{\sinh\left(\frac{z}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{\lambda}\right)} \vec{u}_y;$$
- $\lambda = 17 \text{ nm}$ ;  $2d_m = 1,8 \times 10^{-7} \text{ m}$ ; le courant est nul sauf en surface.
6.  $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{V}_e$ ; avec la transformation galiléenne des champs, on aboutirait à  $\vec{E}' = V_e \left( \frac{\partial B_y}{\partial z'} - \frac{\partial B_z}{\partial y'} \right)$ , non compatible avec l'équation de Maxwell-Gauss, ce qui est contraire au principe de relativité galiléenne;  $\rho = \gamma \rho'$ .
7.  $\vec{j} = -n(r)q\vec{v}$  et  $\rho = (n_0 - n(r))q$ ;
- $$\text{div} \vec{E} = (n_0 - n(r)) \frac{q}{\epsilon_0}; \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$
- $$\text{div} \vec{B} = 0; \text{rot} \vec{B} = -n(r) \mu_0 q \vec{v}.$$
- $$n(r) = \frac{n_0}{1 - \beta^2}; b = a \sqrt{1 - \beta^2}$$
8.  $\vec{j} = \frac{1}{2} \gamma r B_0 \omega \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$ ;  $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\pi}{16} \gamma h B_0^2 \omega^2 a^4$ ;  $B^* = \mu_0 \gamma a^2 B_0 \omega$  et  $B^* \ll B_0$  si  $a \ll \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}}$ .
9.  $\vec{B}(M) = \vec{0}$  et  $\vec{E}(M, t = 0) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ ;
- $$\vec{E}(M, t) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \exp\left(-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t\right) \vec{u}_r; Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{\epsilon_0} t\right).$$