TD 19

Ondes électromagnétiques dans le vide

Questions de cours

— Donner les équations de Maxwell dans le vide
— Déterminer l'équation de propagation du champ électrique puis du champ magnétique dans le vide
— Dans le cas d'une OPPH solution de l'équation de d'Alembert, retrouver la relation de dispersion
— Citer 4 longueurs d'ondes typiques du spectre EM et leur associer leur sources
— Démontrer qu'une onde électromagnétique dans le vide est transverse
— Quelle est la relation entre les normes des champs électriques et magnétiques dans le cas d'une OPPH ?
— Déterminer l'expression simplifiée de la densité d'énergie EM transportée par une OPPH dans le vide
— Idem avec le vecteur de Poynting
— Montrer que l'énergie de l'onde EM se déplace à la vitesse c
— Décrire l'évolution du vecteur champ électrique dans le cas d'une onde polarisée rectilignement, circulairement, elliptiquement ou non polarisée.
— Donner les relations entre les amplitudes des composantes du champ électrique ainsi que leur déphasage éventuel dans chacun des cas mentionnés précédemment.
— Donner la loi de Malus.

Application du cours

Exercice 1 - Exemple d'onde électromagnétique

On s'intéresse à la propagation de l'onde électromagnétique définie par $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \alpha(x+y)\right)\right] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, avec E_0, ω et α des constantes positives.

1. Cette onde se propage-t-elle (si oui dans quelle direction) ou bien est-elle stationnaire ?
2. Est-elle plane ?
3. Donner le vecteur d'onde $\vec{k}$.
4. Que dire de sa polarisation ?
5. Évaluer le champ magnétique $\underline{\overrightarrow{B}}(M,t)$.
6. Que vaut la densité volumique de charge ?
7. Sachant que la densité volumique de courant est de même nulle, en déduire une relation entre α, ω et c, vitesse de la lumière dans le vide.
8. Calculer le vecteur de Poynting moyen. Commenter son expression.

Exercice 2 - OPPM EM de direction quelconque

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est donné par :

$$\overrightarrow{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y \text{ avec } E_x = E_0 \exp\left[i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z) - \omega t\right)\right].$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6.10^{-7}$ m.

1. Calculer la fréquence de l'onde.
2. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
3. Calculer la valeur numérique de la constante k.
4. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
5. Exprimer E_y en fonction de E_x.
6. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ de cette onde.
7. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
8. Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle. Commenter.

Exercice 3 - OPPH + OPPH = ?

Deux ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques de même pulsation, amplitude et phase à l'origine, se propagent selon la direction de l'axe Oz, mais dans des sens contraires. Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique résultants, ainsi que l'expression du vecteur de Poynting, lorsque les deux ondes possèdent les états de polarisation suivants :

1. Les deux ondes sont polarisées rectilignement selon la direction de l'axe Ox.
2. L'onde se propageant vers les z croissants est polarisée circulairement droite, l'autre est polarisée circulairement gauche.

Approfondissement

Exercice 4 - Décharge d'un conducteur dans l'air

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R porte initialement la charge Q_0 uniformément répartie sur sa surface. Cette boule est laissée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ et initialement localement neutre ($\rho(M, t = 0) = 0$ en tout point M à l'extérieur de la boule).
On cherche le champ électromagnétique $\{\vec{E}(M,t); \vec{B}(M,t)\}$ en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques par rapport à O.

1. Déterminer $\vec{E}(M, t = 0)$ à l'extérieur de la boule.
2. Déterminer $\vec{B}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.
3. En utilisant l'équation locale de conservation de l'énergie, trouver le champ $\vec{E}(M,t)$ à l'extérieur de la boule.
4. Montrer que $\rho(M,t) = 0$ à l'extérieur de la boule.
5. Déterminer la charge $Q(t)$ portée par la boule à l'instant t.
6. Calculer de deux manière différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu entre les instants $t = 0$ et $t \to \infty$

Exercice 5 - Faisceau Laser

Une onde plane étant d'extension infinie, elle ne peut représenter de manière réaliste le faisceau d'un laser dont la section S est en pratique inférieure au mm^2. Dans un modèle plus réaliste, on considère l'onde électromagnétique émise dans le vide par un laser en $z = 0$. Cette onde se propage selon la direction $\vec{u}_z$ et peut être mise sous la forme suivante, dans la zone $z \geq 0$:

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}(r,z)\exp[i(\omega t - kz)]\vec{u}_x,$$

avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, et en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) :

$$\underline{E}(r,z) = E_0 \frac{iz_0}{z + iz_0} \exp\left(-ik\frac{r^2}{2(z+iz_0)}\right),$$

où E_0 et z_0 sont des constantes positives (z_0 est appelée distance de Rayleigh).

1. Montrer que le carré du module de $\underline{E}$ se met sous la forme $|\underline{E}(r,z)|^2 = A^2(z)\exp\left(-\dfrac{2r^2}{w(z)^2}\right)$, avec $w(z) = w_0\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{z_0^2}}$.
   Déterminer la constante w_0, nommée *waist* en fonction de z_0 et λ.
2. Montrer que $w(z)A(z) = w_0E_0$.
3. Représenter le graphe de $w(z)$ pour $z \geq 0$.
4. Représenter le graphe du module $|\underline{E}(r,z)|$ du champ électrique en fonction de r pour $z = 0$, puis pour une valeur $z \geq 0$ fixée.
5. Quelle signification physique peut-on donner à $w(z)$ ainsi qu'au waist w_0 ?
6. Montrer que lorsque $z \gg z_0$, le faisceau laser a une forme de cône de sommet O et de demi-angle au sommet β, qui sera exprimé en fonction de w_0 et z_0, puis en fonction de w_0 et λ.
7. Calculer β en degrés pour un laser $YAG - Nd^{3+}$ possédant pour caractéristiques $w_0 = 0,50\ mm$ et $\lambda = 1,1\ \mu m$, puis pour un laser CO_2 de même *waist* mais de longueur d'onde 10 fois plus grande. Commenter.
8. Que dire du comportement du faisceau laser pour $z \ll z_0$?

Exercice 6 - Superposition de deux OPPH

Une O.P.P.H. électromagnétique de pulsation ω se propage dans le vide. Son vecteur d'onde est : $\overrightarrow{k_1} = k_1(\cos\alpha\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\overrightarrow{e_z})$ et son champ électrique est noté $\overrightarrow{E_1}(M,t)$. Elle est polarisée rectilignement suivant l'axe Oy.

1. Que vaut k_1 ? Justifier. Quel est le champ magnétique associé à l'onde ?

Une deuxième O.P.P.H., de même fréquence, amplitude et polarisation est superposée à la première. Son vecteur d'onde est le symétrique de $\overrightarrow{k_1}$ par rapport à $\overrightarrow{e_x}$. Ces deux ondes sont en phase à l'origine des coordonnées.

2. Exprimer les champs électrique et magnétique de l'onde globale.
3. Quelle est la direction de propagation de cette onde globale ? Caractériser cette onde. Quelle vitesse de phase peut-on associer à cette onde ? Quelle est la particularité de cette vitesse ?

4. Quelle est la valeur moyenne temporelle $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting de l'onde globale ?
5. Exprimer la puissance moyenne dans le temps transportée par l'onde globale à travers une surface S rectangulaire de cotés (L, l) très grands devant la période spatiale de l'onde, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde globale.
6. Quelle vitesse d'énergie ń moyenne ż (moyenne temporelle et spatiale) peut-on associer à cette onde ? Commenter ce résultat.

Élements de réponse

1. $\vec{k} = \alpha(\vec{u}_x + \vec{u}_y)$; $\underline{\overrightarrow{B}}(M,t) = -2\dfrac{\alpha}{\omega}E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \alpha(x+y)\right)\right]\vec{u}_z$; $\omega = c\alpha\sqrt{2}$

   $< \overrightarrow{\Pi} >= \dfrac{E_0^2}{c\mu_0\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
2. $f = 5.10^{14}$ Hz, domaine du visible ; un plan d'onde a pour équation $2x + 2y + z = K_0$; $E_y = -E_x$; $\overrightarrow{B} = \dfrac{E_x}{3c}(\vec{u}_x + \vec{u}_y - 4\vec{u}_z)$; $< u_{em} >= \varepsilon_0 E_0^2$; $< \overrightarrow{\Pi} >= \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}$, où $\vec{u}$ est la direction de propagation.
3. On obtient des ondes stationnaires

   1.$\overrightarrow{E} = 2E_0\cos(\omega t)\cos(kz)\overrightarrow{e_x}$ et $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \overrightarrow{0}$

   2. Ondes stationnaires dans deux directions et $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \overrightarrow{0}$ encore.
4. 1. $\overrightarrow{E} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$

   2.$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$

   3. $\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0}E = 0$ puis $\overrightarrow{E} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}e^{-\frac{\gamma t}{\epsilon_0}}\overrightarrow{e_r}$

   4. $\rho(r > R, t) = 0$

   5. $Q(t) = Q_0 e^{\frac{-\gamma t}{\epsilon_0}}$

   6.On peut intégrer la puissance dissipé entre 0 et l'infini ou utiliser $\mathcal{E} = -\Delta U_{em}$. On trouve $\mathcal{E} = \frac{\gamma^2 Q_0}{8\pi\epsilon_0^2 R}$
5. $w_0 = \sqrt{\dfrac{2z_0}{k}} = \sqrt{\dfrac{z_0\lambda}{\pi}}$, $A(z) = \dfrac{E_0}{\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{z_0^2}}}$. $\beta = \dfrac{w_0}{z_0} = \dfrac{\lambda}{\pi\omega_0}$.

   Le laser CO_2 diverge 10 fois moins que le laser $YAG - Nd^{3+}$.

   Dans le cas $z \ll z_0$, le faisceau est quasiment cylindrique $w(z) \simeq w_0$.
6. 1. $k_1 = \frac{\omega}{c}$

   2. $\overrightarrow{k_2} = \cos\alpha\overrightarrow{e_x} - \sin\alpha\overrightarrow{e_z}$

   utiliser $\cos(a-b) + \cos(a+b)$

   3. $v_\varphi = \frac{c}{2\cos\alpha}$

   4. $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\frac{\omega}{c}z\sin\alpha)\cos\alpha\overrightarrow{e_x}$

   5. $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}S\cos\alpha$

   6.$\langle\langle u_{em}\rangle_t\rangle_z = \epsilon_0 E_0^2$ et $v_e = c\cos\alpha$