

Éléments de corrigé proposés par Emilie Aubry.

Merci à Julien Bellier pour la relecture.

Toutes les corrections et compléments sont les bienvenus.

Ce document peut être distribué à vos élèves.

Les remarques en rouge s'adressent d'abord aux enseignants.

Problème A : éléments de thermohydraulique

A.1.1) $P_{th} = \varphi_v 2eIH$ (puissance volumique dégagée uniforme)

AN : $P_{th} = 150 \text{ kW}$

A.1.2)

• Résolution de l'équation de la chaleur en régime permanent :

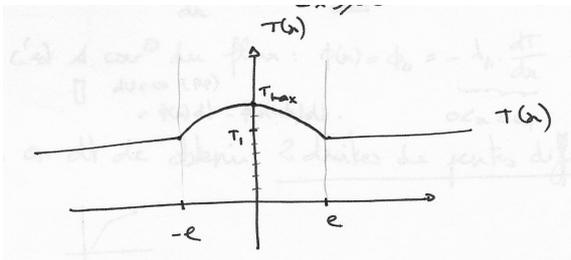
- RP : $\partial T / \partial t = 0$, reste donc : $d^2 T / dx^2 = -\varphi_v / \lambda$
- Deux intégrations successives : $T(x) = -\frac{\varphi_v}{2\lambda} x^2 + Ax + B$ avec A, B constantes d'intégration
- CL : $T(x=e) = T_1 = -\frac{\varphi_v}{2\lambda} e^2 + Ae + B$ et $T(x=-e) = T_2 = -\frac{\varphi_v}{2\lambda} e^2 - Ae + B$
- Après résolution (par exemple addition et soustraction des deux CL précédentes), on trouve : $B = (T_1 + T_2) / 2 + \varphi_v e^2 / 2\lambda$ et $A = (T_2 - T_1) / 2e$

- Ainsi : $T(x) = \frac{\varphi_v}{2\lambda} (e^2 - x^2) + \frac{T_2 - T_1}{2} \frac{x}{e} + \frac{T_1 + T_2}{2}$

• Détermination du maximum :

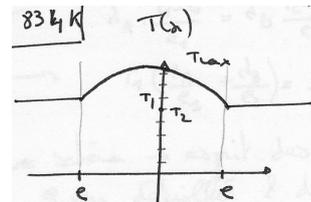
Annulation $\frac{dT}{dx}(x = x_{max}) = 0$ en $x_{max} = \frac{\lambda}{2\varphi_v e} (T_2 - T_1)$. Et : $T_{max} = \frac{\varphi_v}{2\lambda} e^2 + \frac{\lambda}{8\varphi_v e^2} (T_2 - T_1)^2 + \frac{T_1 + T_2}{2}$

A.1.3) AN : $x_{max} = 0$ attendu par raison de symétrie
 $T_{max} = 814 \text{ K}$



A.1.4) AN : $x_{max} = -73 \mu\text{m}$ et $T_{max} = 834 \text{ K}$

$x_{max} < 0$ attendu car $T_1 > T_2$. Graphiquement, décalage assez peu visible. Pour avoir $T_1 > T_2$, il faut $v_1 < v_2$: le fluide 2 'n'a pas le temps' de bien thermaliser le combustible, il se réchauffe moins que le fluide 1.



A.2.1)

• Physique du problème :

- 'reliés sans résistance thermique' : température continue à l'interface → profil 4 impossible
- RP sans dégagement de puissance : $T(x)$ constitué de portions de droites affines d'après A.1.2) lorsque $\varphi_v = 0$ → profil 3 impossible
- conduction due uniquement à la différence de température en $x=0$ et $x=e_1+e_2$: transfert thermique du plus chaud vers le plus froid, pas de maximum de température à l'intérieur → profil 2 impossible

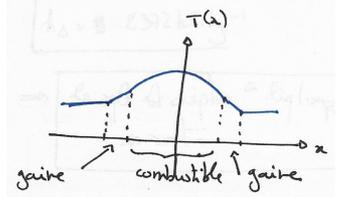
• Analyse du profil 1 :

- vecteur densité de flux thermique dirigé selon x décroissants (chaud vers froid) : $\vec{j}_{th} = j_{th} \vec{e}_x$ où $j_{th} < 0$
- loi Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad } T = -\lambda dT/dx \vec{e}_x$ (sens cohérent, chaud vers froid)
- conservation du flux : premier principe en RP appliqué à une tranche de solide (A ou B) entre x et $x+dx$ → $j_{th}(x) = j_{th}(x+dx) = j_0$, constant quel que soit x
- Ainsi : $j_0 = -\lambda_A (dT/dx)_A = -\lambda_B (dT/dx)_B$ → pentes de même signe retrouvé (impossibilité profil 2)
- Or $(dT/dx)_A = (T_1 - T_0) / e_1$ et $(dT/dx)_B = (T_2 - T_1) / e_2$

- Après calcul : $T_1 = \left(\frac{\lambda_A}{e_1} T_0 + \frac{\lambda_B}{e_2} T_2 \right) \left(\frac{\lambda_A}{e_1} + \frac{\lambda_B}{e_2} \right)$

A.2.2) Physique du problème :

- pas de résistance thermique → profil de température continu
- dans la gaine, pas de fission → portion de droite affine dans la gaine
- dans le combustible, fission → profil semblable à A.1.3)
- $T_1 = T_2$ car $v_1 = v_2$ (cf A.1.4)



A.3.1)

- En cartésien (expression à connaître) : $\text{div}(\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \frac{dG}{dz}$ car $v_x = v_y = 0$
- Or RP, $\partial \rho / \partial t = 0$. Reste donc dans l'équation locale de conservation de la masse : $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$
- Ainsi : $G(z) = G$ et $D_m(z) = D_m$ constants pour tout z (S indépendant de z)

A.3.2)

- Equation d'évolution de h $h(z)$:
 - En RP $\partial u / \partial t = 0$. Or $H(z+dz) - h(z) = (dh/dz) dz$
 - Ainsi : $D_m (dh/dz) = \varphi_L$
- Intégration : avec la CL $h(z=0) = h_e$: $h(z) = h_e + (\varphi_L / D_m) z$
- En $z = H$: $h_s = h_e + (\varphi_L / D_m) H$ AN : $h_s = 2372 \text{ kJ.kg}^{-1}$
- Interprétation :
 - à 6,89 MP : $h' < h_s < h''$: Le fluide en sortie est diphasique liquide/vapeur.
- Cote d'ébullition :
 - La vapeur apparaît à z_{eb} tel que $h(z = z_{eb}) = h'$
 - On obtient : $z_{eb} = (h' - h_e) D_m / \varphi_L$ AN : $z_{eb} = 0,259 \text{ m}$

A.3.3) Avec D_m' : $h_s' = h_e + (\varphi_L / D_m') H$ AN : $h_s' = 1022 \text{ kJ.kg}^{-1} < h'$, pas d'ébullition

A.3.4) Nom : La question semble mal posée. Si elle était : comment est appelé ce bilan quand le système est fermé, la réponse serait PFD (ou 2ème loi de Newton).

- Identification des termes : Réécrivons cette relation :

$$\frac{\partial mv}{\partial t} - \rho(z) S v^2(z) + \rho(z+dz) S v^2(z+dz) = P(z) S - P(z+dz) S - \rho(z) g S dz$$

terme local terme convectif forces de pression poids

termes local et convectifs : bilan de quantité de mouvement pour un système fermé en écoulement

- Régime stationnaire : $\partial(mv) / \partial t = 0$
 - Or $-\rho(z) S v^2(z) + \rho(z+dz) S v^2(z+dz) = S (d(\rho v^2) / dz) dz$ et $P(z) S - P(z+dz) S = S (dP / dz) dz$
 - Ainsi, on a bien : $\frac{dP}{dz} = - \frac{d(\rho v^2)}{dz} - \rho g$

A.3.5.a) $\Delta P = \Delta P_{acc} + \Delta P_{grav} + \Delta P_{frott}$

A.3.5.b) Vitesse massique : $G = D_m' / dl$ AN : $G = 2,67 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

• Pertes par accélération : $\Delta P_{acc} = \int_0^H -d(\rho v^2) = -\rho_s v_s^2 + \rho_e v_e^2$ AN : $\Delta P_{acc} = -5,35 \text{ mbar}$

A.3.5.c) Pertes par gravité : $\Delta P_{grav} = -\bar{\rho} g H$ AN : $\Delta P_{grav} = -81,6 \text{ mbar}$

A.3.5.d) Reynolds : cf cours AN : $Re = 1,98 \cdot 10^5$ $f = 0,015$ cohérent avec la suite de l'énoncé

• Pertes par frottement : $\Delta P_{frott} = \int_0^H -(G^{2f}) / (2 D_H \bar{\rho}) dz = -G^2 f H / (4 S \rho)$ AN : $\Delta P_{frott} = -64,2 \text{ mbar}$

A.3.5.e) NB : attention à la notation, W est ici une puissance.

• La pompe doit compenser la perte de pression → calculs permettent le dimensionnement de la pompe

• Equation aux dimensions : $\dim(W_{pompe}) = \dim(\text{force}) L / T = \dim(\text{Pression}) L^3 / T$ soit

$\dim(W_{pompe}) = \dim(\Delta P_t D_m / \rho_e)$, qui donne $W_{pompe} = |\Delta P_t| \frac{D_m}{\rho_e}$

• AN : avec 18W, on peut compenser une perte $|\Delta P_t| = 154 \text{ mbar} \approx (5,35 + 81,6 + 64,2) \text{ mbar}$. OK.

A.3.5.f) $\Delta P_{coeur} = \Delta P_t$ et $D_{mcoeur} = N D_m$. Ainsi : $W_{primaire} = N W_{pompe}$ AN : $W_{primaire} = 36 \text{ kW}$

Problème B : lunette astronomique

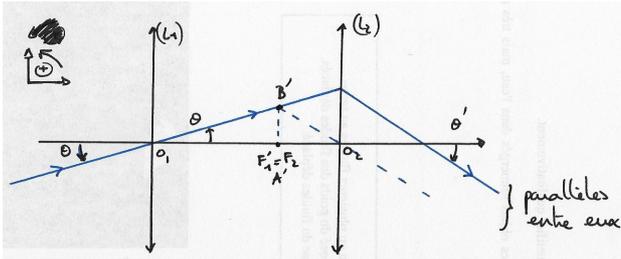
B.1.1)

- Un œil normal n'a pas besoin d'accomoder s'il observe un objet situé à l'infini.
- L'image objective doit donc se situer en F_2 . Or l'objet éloigné peut être considéré à l'infini donc cette image objective se trouve en F'_1 . Ainsi $F'_1 = F_2$
- Ce système ne possède pas de foyer image (l'image d'un objet à l'infini est elle-même à l'infini) ni objet (l'objet donnant une image à l'infini est lui-même à l'infini). On parle donc de système afocal.

B.1.2)

• Conditions de Gauss : rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique ($\theta \ll 1$) et proches de l'axe optique (par rapport au rayon de la lentille, le rayon doit arriver près du centre, pas près des bords).

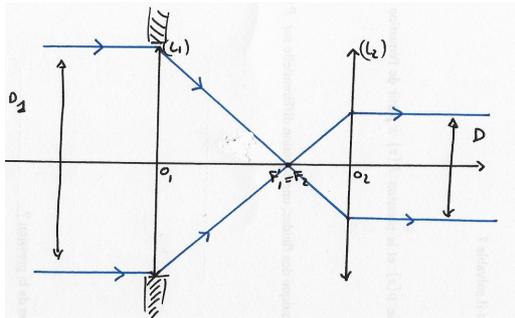
• Construction de l'émergent d'un rayon incident :



• Détermination du grossissement :

- On a : $\tan \theta = \overline{A'B'} / f'_1$ et $\tan \theta' = -\overline{A'B'} / f'_2$
- signes cohérents avec le cas de la figure
- Et : $G = \theta' / \theta \approx \tan \theta' / \tan \theta$ donc
- $G = -f'_1 / f'_2$. AN : $G = -50$.
- $G < 0$ cohérent avec l'inversion du sens de l'image.

B.2) Construction d'un faisceau lumineux :



• Détermination de D

Thalès : $D_1 / D = f'_1 / f'_2$ donc $D = D_1 / |G|$

• Limitation du faisceau émergent :

- Si $D > D_2$, c'est l'oculaire qui limite la taille du faisceau émergent. Sinon, c'est l'objectif.
 - AN : $D = 2 \text{ mm} < D_2$.
- La taille de l'objectif limite le diamètre du faisceau émergent.

B.3) Quand le faisceau lumineux s'incline, il ne vient plus frapper l'oculaire (L_2) de façon centrée. S'il est trop incliné, tout ou partie du faisceau "tape" en dehors de (L_2), sur la monture. Ils ne ressortent pas. L'oculaire définit donc le diaphragme de champ, c'est-à-dire la zone (le champ) d'espace visible avec la lunette.

B.4) Aberration chromatique : les rayons traversant la lentille sont déviés différemment selon leur longueur d'onde car l'indice optique en dépend (la focale dépend de l'indice $f'(n)$) ; l'image d'un point est donc une tache en lumière polychromatique, les différentes longueurs d'onde la constituant ne convergeant pas au même endroit.

- $n(\lambda)$: milieu dispersif.

Problème C : récupération d'énergie vibratoire

C.1.1) On veut : bonne efficacité (énergie récupérée/énergie disponible). Pour un usage « universel » : spectre plat. Pour un usage sur une machine de fréquence de vibration donnée : résonance à cette fréquence.

C.1.2) Avantage : plus d'énergie potentiellement récupérable. Risque : endommagement.

C.1.3) Qu'attend-on dans cette question ? On donne dans l'énoncé des énergie et pas des puissances.

- Batterie de portable $\approx 10 \text{ kJ}$ (estimation par puissance et temps en veille ; ou par l'énergie massique d'une batterie Li-ion) \rightarrow qu'en faire ?
- Autre point de vue : smartphone se charge en continu et ici on produit de l'alternatif \rightarrow nécessité d'un redresseur.

C.1.4)

• Relation accélération /déplacement : $\vec{a} = d^2 \vec{OM} / dt^2$

En ordre de grandeur : $a \sim (2\pi f)^2 d$ où $f = 200 \text{ Hz}$ et $d = 5 \text{ m.s}^{-2}$, donne bien $d \sim 3 \mu\text{m}$

• Aspect énergétique : $E_{max} = \frac{1}{2} m v^2 \sim \frac{1}{2} m \left(\frac{a}{2\pi f} \right)^2$ AN : $E_{max} \sim 10 \text{ nJ}$

C.2.1) Bilan des forces {masse M} :

poils $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$; amortissement $\vec{F} = \vec{0}$; rappel du ressort $\vec{T} = k(l_{eq} - l_0) \vec{e}_z$

• PFD {masse M} dans référentiel galiléen (pas de vibrations) :

$m a_{M/R_s} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T}$. Or $a_{M/R_s} = 0$. Après projection sur \vec{e}_z , il vient : $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$

C.2.2) PFD {masse M} dans référentiel non galiléen (vibrations) :

$m a_{M/R_s} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$ où $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m z''_{vib} \vec{e}_z$ et $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ car (R_s) est en translation par rapport à un référentiel galiléen

• Projection sur \vec{e}_z : $m \ddot{z} = -mg - \lambda \dot{z} + k(l - l_0) - m z''_{vib}$. Avec $l = l_{eq} - z$ et sans oublier $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$, on

obtient après calculs et en mettant sous forme canonique : $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = -z''_{vib}$

C.2.3) On passe en complexes : $(j\omega)^2 Z + \frac{\lambda}{m} (j\omega) Z + \frac{k}{m} Z = -(j\omega)^2 Z_{vib}$ soit $H = \frac{\frac{\omega^2}{k/m}}{1 + j\omega \frac{\lambda}{k} - \frac{\omega^2}{k/m}}$

• Type de filtre : à BF : $H \sim \frac{\omega^2}{k/m} \rightarrow 0$; à HF : $H \sim \frac{\omega^2}{k/m} \sim -1 \neq 0$. Ainsi : Passé-haut du 2^{ème} ordre

C.2.4) Par identification avec la forme canonique proposée : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Et $Q \omega_0 = k/\lambda$ soit $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$.

C.2.5) Amplification de l'amplitude des vibrations. **L'énoncé oublie que la fréquence de résonance est légèrement supérieure à ω_0 (effet rapidement négligeable quand Q atteint qq unités).**

C.3.1.a) Théorème de Gauss : cf cours

• Application du théorème de Gauss (cf cours) : $\vec{E}_+ = -\vec{E}_- = \sigma / 2 \epsilon_0 \vec{e}_z$

C.3.1.b) Sommation des contributions de chaque plan : (cf cours) $\vec{E}_{z < 0} = \vec{E}_{z > e} = \vec{0}$ et $\vec{E} = -\sigma / \epsilon_0 \vec{e}_z$

C.3.1.c) (cf cours) : $C = \epsilon_0 S / e$ et $W_e = \frac{1}{2} C U^2$

C.3.2) $C_{min} = \epsilon_0 S / (d + Z)$ et $C_{max} = \epsilon_0 S / (d - Z)$

C.3.3a) $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ **Sans lien avec la suite. Utilité ?**

C.3.3.b) Quand la capacité est chargée à $q = C_{max} U$: $W_e(t = t_0) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{max}}$

Juste après le déplacement de l'armature : $W_e(t = t_1) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{min}}$ (fonctionnement à charge constante)

L'énergie maximum récupérable est donc (cas où il n'y a pas de dissipation) :

$W = W_e(t = t_1) - W_e(t = t_0) = \frac{1}{2} U^2 \frac{C_{max}}{C_{min}} (C_{max} - C_{min})$

C.4) La bobine fixée à la poutre est mobile, dans le champ magnétique créé par l'aimant permanent → phénomène d'induction. Il apparaît donc à ses bornes une fem induite (loi de Faraday). On transforme ainsi l'énergie mécanique des vibrations en énergie électrique.