

---

**DS 6**  
**Ondes électromagnétiques et thermodynamique**

Vendredi 19 mars 2021

---

# Problème I : Ondes électromagnétiques dans un câble coaxial

(CCP)

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur  $\ell$ , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon  $R_1$ , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur  $R_2$  et de rayon extérieur  $R_3$ , appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On donne :  $R_1 = 0,25$  mm,  $R_2 = 1,25$  mm et  $\ell = 100$  m.

## I - Modélisation du câble

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon  $R_1$ , le conducteur (2) a un rayon  $R_2$  (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur  $\ell$ . Vu que  $\ell \gg R_2$ , on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

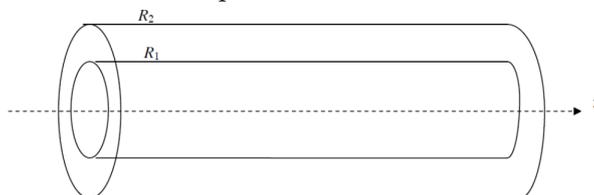


Figure 1 : Portion de câble

On se place dans la base cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ .

L'élément de volume est  $d\tau = dr \times r d\theta \times dz$ .

### I A - Capacité linéique $C$

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives  $Q$  et  $-Q$ . Elles sont uniformément réparties en surface.

1. Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$  dans l'espace interconducteur.
2. Pour  $R_1 < r < R_2$ , en utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, exprimer  $E(r)$  en fonction de  $\ell$ ,  $r$ ,  $Q$  et  $\varepsilon_0$ .
3. Rappeler l'expression de l'énergie volumique d'origine électrique  $u_e(M)$  associée au champ électrique.

Par intégration sur le volume compris entre les conducteurs (1) et (2), donner l'expression de l'énergie électrique totale  $U_e$  contenue dans le câble de longueur  $\ell$  en fonction de  $Q$ ,  $\ell$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\varepsilon_0$ .

4. En déduire la capacité  $C_\ell$  du câble de longueur  $\ell$  en fonction de  $\ell$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\varepsilon_0$ , puis la capacité linéique définie par  $C = \frac{C_\ell}{\ell}$ .
5. En pratique, l'espace interconducteur n'est pas vide, mais contient un matériau isolant de permittivité diélectrique relative  $\varepsilon_r = 3,1$ . On a alors  $C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ .

Calculer numériquement  $C$ .

## I B - Inductance linéique $L$

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller  $I_0$  (dans le sens de  $+\vec{u}_z$ ), le conducteur extérieur assure le transport du courant retour (dans le sens  $-\vec{u}_z$ ).

- Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique  $\vec{B}$ . Par des arguments d'invariance et de symétries, justifier que  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$ .
- Pour  $R_1 < r < R_2$ , par application du théorème d'Ampère sur un parcours que l'on précisera, exprimer  $B(r)$  en fonction  $I_0$ ,  $r$  et  $\mu_0$ .
- Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique  $u_m(M)$  associée au champ  $\vec{B}(M)$ .  
Par intégration sur le volume compris entre les conducteurs (1) et (2), donner l'expression de l'énergie magnétique totale  $U_m$  contenue dans le câble de longueur  $\ell$  en fonction de  $I$ ,  $\ell$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\mu_0$ .
- En déduire l'expression de l'inductance  $L_\ell$  du câble de longueur  $\ell$  en fonction de  $\ell$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $\mu_0$ , puis l'expression de l'inductance linéique  $L$  définie par  $L = \frac{L_\ell}{\ell}$ .
- Calculer le produit  $C \times L$  pour ce câble. Commenter.

## II - Onde électromagnétique

On se place ici dans le cadre général de la théorie de l'électromagnétisme. On considère le câble comme infini suivant l'axe des  $z$ . Une onde électromagnétique se propage à l'intérieur du câble dans la région  $R_1 < r < R_2$ , assimilable à du vide. Elle est définie par son champ électrique :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_r, \text{ avec } \alpha \text{ constante positive.}$$

On lui associe un champ électrique complexe :  $\underline{\vec{E}}(M, t) = \frac{\alpha}{r} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_r$ .

Il existe un champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  auquel on associe le champ complexe  $\underline{\vec{B}}(M, t)$ .

- L'onde ainsi décrite est-elle plane ? Est-elle progressive ? Si oui, préciser sa direction de propagation.
- On note  $E_0$  l'amplitude maximale du champ électrique dans le câble coaxial. Préciser son unité et exprimer  $\underline{\vec{E}}(M)$  en fonction de  $E_0$ ,  $r$ ,  $z$ ,  $t$ ,  $k$ ,  $\omega$  et  $R_1$ .
- Rappeler les 4 équations de Maxwell dans le vide et préciser en quelques mots le contenu physique de chacune d'elles.
- À partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique  $\underline{\vec{E}}$ .
- À l'aide du formulaire donné en fin de problème, exprimer  $\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}}$  pour le champ considéré, puis  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}})$ .  
Déduire de ce calcul et de l'équation de propagation la relation de dispersion reliant  $k$ ,  $\omega$  et  $c$ .  
Le milieu est-il dispersif ?
- Déterminer en fonction de  $E_0$ ,  $r$ ,  $t$ ,  $\omega$ ,  $k$  et  $R_1$ , l'expression du champ magnétique complexe  $\underline{\vec{B}}(M)$  associé à cette onde, à une composante permanente près (indépendante du temps). Justifier pourquoi on peut considérer cette composante comme nulle.

17. On désigne par  $\vec{\Pi}$  le vecteur de Poynting associé à cette onde électromagnétique. Déterminer l'expression de  $\vec{\Pi}$  en fonction de  $E_0$ ,  $R_1$ ,  $r$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $z$ ,  $t$  et  $\mu_0$ .
18. Déterminer l'expression de la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  transportée par le câble en fonction de  $E_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $c$  et  $\mu_0$ .
19. Application numérique : en déduire l'amplitude  $E_0$  du champ électrique sachant que la puissance moyenne transportée est de 10 W.
20. Calculer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à cette onde. En déduire la vitesse moyenne de propagation de l'énergie dans le câble. Commenter.

### DONNÉES

|                                    |  |
|------------------------------------|--|
| vitesse de la lumière dans le vide | $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$                      |
| perméabilité magnétique du vide    | $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$              |
| permittivité diélectrique du vide  | $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F m}^{-1}$ |

### FORMULAIRE

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{A} = \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{A})$$

## Problème II : Cycle de Brayton d'une centrale nucléaire

(CCP)

Les centrales nucléaires de la génération 6 prévues vers les années 2030 devront être sûres et présenter un rendement important. Une option étudiée parmi 6 grands choix est le réacteur à très haute température refroidi à l'hélium. Ce type de réacteur offrirait l'avantage d'améliorer l'efficacité de la conversion énergétique, compte tenu de la température élevée de la source chaude et de permettre en sus la production d'hydrogène. Dans ces installations de forte puissance, on utilise le cycle de Brayton (ou cycle de Joule) pour extraire le travail et, en fin de compte, produire de l'électricité.

Le gaz utilisé dans la centrale est l'hélium, dont les caractéristiques sont :

- $C_{V,m} = \frac{3R}{2}$ ,  $C_{P,m} = \frac{5R}{2}$  avec  $R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}$
- $M_{He} = 4,00.10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$

Dans l'ensemble du problème, le gaz est supposé parfait.

### A - Cycle de Brayton

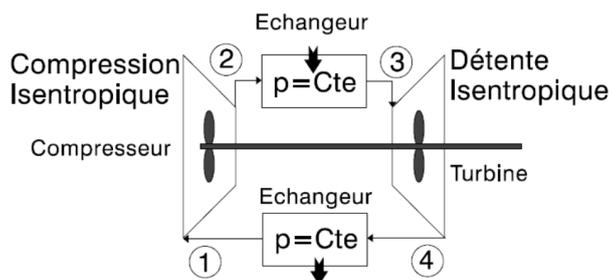


Figure n° 1 : Cycle de Brayton

Un gaz parfait circule dans une installation. Il échange du travail avec l'extérieur dans le compresseur et la turbine. Le travail fourni par le passage du gaz dans la turbine sert d'une part à faire fonctionner le compresseur (turbine et compresseur montés sur le même axe) et d'autre part à fabriquer de l'électricité. Les transferts thermiques ont lieu dans des échangeurs. Le fluide, ici un gaz d'hélium, décrit le cycle de Brayton, décomposé ci-après.

#### Cycle de Brayton

- compression adiabatique réversible du point 1 avec une température  $T_1 = 300 \text{ K}$  et une pression  $P_1 = 20.10^5 \text{ Pa}$  vers le point 2 à la pression  $P_2 = 80.10^5 \text{ Pa}$ ,
- détente isobare du point 2 vers le point 3 à la température  $T_3 = 1300 \text{ K}$ ,
- détente adiabatique réversible de 3 vers 4 (de  $P_3 = P_2$  à  $P_4 = P_1$ ),
- compression isobare de 4 vers 1.

1. Pour une transformation isentropique, justifier que la relation entre  $T$  et  $P$  peut se mettre sous la forme  $\frac{T}{P^\beta} = \text{cte}$ . Exprimer  $\beta$  en fonction de  $\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$ .
2. Déterminer les températures  $T_2$  et  $T_4$ . Effectuer l'application numériquement.
3. Tracer le cycle de Brayton sur un diagramme  $P = f(V_m)$ .

- Calculer les travaux  $W_{12}$  et  $W_{34}$  échangés avec l'extérieur (travaux utiles reçus) lors des transformations isentropiques 12 et 34.

On rappelle que pour les systèmes ouverts, on a  $dH_m = \delta W_{\text{utile},m} + \delta Q_m$ , avec  $\delta W_{\text{utile},m} = V_m dP$ .

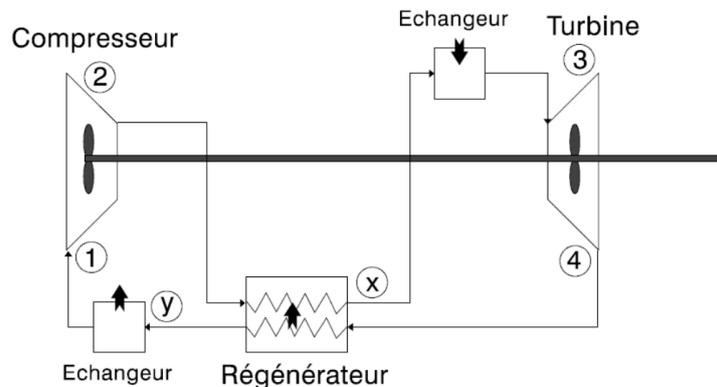
Effectuer l'application numérique pour une mole d'hélium.

- Exprimer les transferts thermiques reçus  $Q_{23}$  et  $Q_{41}$ . Effectuer l'application numérique pour une mole d'hélium.
- Montrer que l'efficacité peut se mettre sous la forme  $e = 1 - \frac{1}{(r_P)^\beta}$ , avec  $r_P = \frac{P_2}{P_1}$ .
- Calculer numériquement cette efficacité et comparer à l'efficacité de Carnot obtenue en utilisant les deux températures extrêmes du cycle.
- Exprimer le travail reçu au cours d'un cycle à partir des températures extrêmes  $T_3$  et  $T_1$ , de  $R$  (ou  $C_P$ ), de  $\beta$  et du rapport des pressions  $r_P$ .
- Montrer que la valeur absolue du travail passe par une valeur maximale en fonction du rapport des pressions  $r_{Pm}$  pour :

$$r_{Pm} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{1}{2\beta}}.$$

Calculer numériquement  $r_{Pm}$  et l'efficacité dans ce cas.

## B - Cycle de Brayton avec régénérateur



**Figure n° 2 : Cycle de Brayton avec régénérateur**

L'utilisation d'un régénérateur (ou récupérateur de chaleur) pendant les deux transformations isobares peut se révéler judicieux dans certaines conditions que nous allons déterminer. Si la température à la sortie de la turbine est plus élevée que la température du gaz comprimé à la sortie du compresseur, une partie de l'énergie du gaz sortant de la turbine peut être cédée (en recourant à un régénérateur) au gaz allant vers l'échangeur chaud et ainsi améliorer l'efficacité du cycle de Brayton. On suppose que les transferts thermiques associés au régénérateur sont internes.

Dans le cycle, nous rajoutons deux lettres  $x$  et  $y$  afin d'isoler la partie échangée dans le régénérateur. Le cycle est donc composé comme indiqué sur la figure n° 2 :

### Cycle de Brayton avec régénérateur

- compression adiabatique réversible du point 1 vers le point 2,
- détente isobare du point 2 vers le point  $x$  dans le régénérateur puis du point  $x$  au point 3 en contact avec le thermostat chaud,
- détente adiabatique réversible du point 3 vers le point 4,
- compression isobare du point 4 vers le point  $y$  dans le régénérateur puis du point  $y$  au point 1 en contact avec le thermostat froid.

En supposant un régénérateur parfait, on a :  $T_x = T_4$  et  $T_y = T_2$ .

10. Calculer algébriquement les transferts thermiques molaires  $Q_{x3}$  et  $Q_{y1}$  provenant des thermostats. L'application numérique n'est pas demandée.
11. En déduire l'efficacité et la mettre sous la forme :

$$e = 1 - \left( \frac{T_1}{T_3} \right) (r_P)^\beta.$$

Effectuer l'application numérique avec  $P_1 = 20.10^5$  Pa et  $P_2 = 80.10^5$  Pa.

12. Pour quelle valeur de  $r_{Pe}$  l'efficacité avec régénérateur est égale à l'efficacité sans régénérateur ? Vérifier alors que  $T_2 = T_4$ , ce qui veut dire que le régénérateur ne joue plus aucun rôle.
13. Calculer numériquement  $r_{Pe}$  dans ce cas et expliquer vers quelle valeur devrait tendre  $r_P$  pour atteindre l'efficacité de Carnot. Pour y parvenir, on utilise un étagement de la compression et de la détente conduisant au cycle d'Ericsson.

## Pulsar et électromagnétisme

Le pulsar est un objet céleste compact (étoile à neutrons) en rotation sur lui-même autour d'un axe et possède un très fort champ magnétique  $\vec{B}_p$ . On se propose d'étudier quelques-unes de ses propriétés et leur incidence sur les particules qui se trouvent à leur voisinage.

On rappelle la formule donnant la divergence d'un vecteur  $\vec{A}(r) = A(r)\vec{e}_r$  radial ne dépendant que de la distance  $r=OM$  en coordonnées sphériques:

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A(r))$$

Pour les applications numériques on donnera un chiffre significatif et on utilisera les valeurs approchées suivantes:

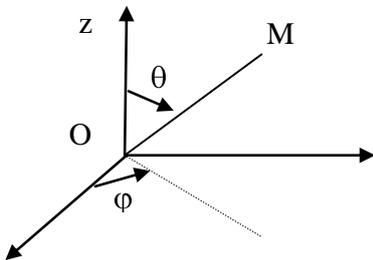
Constante de gravitation  $G = 6 \cdot 10^{-11}$  SI

Charge élémentaire  $e = 2 \cdot 10^{-19}$  C

Si besoin est, on pourra approcher  $\pi$  par 3.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,6 \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1$$

Coordonnées sphériques :



### **A) Etude mécanique**

**A-1** Rappeler les expressions de la loi de Coulomb et celle de la loi de Newton concernant l'interaction de deux masses ponctuelles. Rappeler le théorème de Gauss pour le champ électrique. Considérant une distribution de masse qui crée un champ de gravitation  $\vec{g}(M)$ , donner la forme du théorème de Gauss.

**A-2.** On considère une étoile sphérique de rayon R qui est constituée de matière en auto-gravitation (en interaction avec elle-même). Un point M est repéré en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . La masse volumique est notée  $\mu(r)$ .

Exprimer la masse  $dm$  comprise entre les rayons  $r$  et  $r+dr$  en fonction de  $\mu(r)$ . En déduire la masse totale sous forme intégrale.

**A-3.** Exprimer la force de gravitation entre 2 éléments de masse  $m$  et  $m'$  situé à la distance  $r$  l'un de l'autre. Montrer que la force dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  que l'on exprimera en fonction de  $m$ ,  $m'$ ,  $G$  et  $r$ . On supposera que cette énergie s'annule à l'infini.

**Dans toute la suite, sauf aux questions A-10 à A13, on considère que la masse volumique est uniforme égale à celle du cœur de  $\mu_c$ .**

**A-4** Lorsque le rayon de l'étoile est  $r$ , calculer le champ de gravitation créé à l'extérieur de l'étoile en un point  $M$  situé à une distance  $r'=OM>r$ . Montrer que ce champ est identique à celui qui serait créé par une masse ponctuelle  $m(r)$  située au centre  $O$  de l'étoile.

**A-5** On apporte ensuite de l'infini une masse élémentaire  $dm$  de sorte que le rayon devienne  $r+dr$ ; montrer que la variation d'énergie potentielle de l'étoile s'écrit  $dE_p = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^4 dr$ .

On constitue ainsi l'étoile de rayon  $R$  et de masse  $M_o$ , Calculer son énergie potentielle. Montrer qu'elle se met sous la forme  $E_p = -K \frac{GM_o^2}{R}$ ; donner la valeur de  $K$ .

**A-6** Déterminer le champ de gravitation à l'intérieur de l'étoile en fonction de la masse et du rayon.

**A-7** En supposant l'équilibre hydrostatique réalisé, donner la relation différentielle entre la pression  $P(r)$  et  $g(r)$  la composante radiale du champ de gravitation. Que peut on dire de la valeur de  $P$  en  $r=R$ ? En déduire l'expression de la pression .

**A-8.** On suppose le gaz parfait. Déterminer le lien entre la température  $T(r)$ , la pression, masse volumique et la masse molaire  $M_m$ . En déduire que la pression peut être reliée à la densité volumique d'énergie interne par la relation  $p(r) = (\gamma-1)e(r)$  . En déduire  $E_{int}$  l'énergie interne de l'étoile.

Quelle relation simple lie  $E_p$  et  $E_{int}$  ?

**A-9** . On donne  $\mu_c = 10^{17} kg.m^{-3}$ ,  $R= 10$  km,  $\gamma=5/3$  : Calculer la masse  $M_o$ ,  $E_p$ ,  $E_{int}$  et la pression au centre  $P(0)$  .

Pour les question (A-10.. A-13 ) on suppose que la pression vérifie l'équation d'une transformation polytropique  $p(r) = K_0 \mu(r)^k$ , on posera  $k=1+1/n$ ; on ne considère donc plus que  $\mu$  est constant.

**A-10.** Donner l'équivalent de l'équation de Maxwell Gauss pour le champ de gravitation. En déduire différentielle qui lie  $g(r)$  à  $\mu(r)$ .

En utilisant en outre l'équation de la statique des fluides, obtenir l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\mu(r)$  :  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \mu^{(k-2)} \frac{d\mu}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{kK_0} r^2 \mu$

**A-11** En posant  $x=r/a$  et  $y=(\mu(r)/\mu_c)^{1/n}$ , montrer que les variables  $x$  et  $y$  vérifient l'équation différentielle suivante :  $y''+2y'/x=-y^n$  (1) à condition de donner à  $a$  une valeur que l'on explicitera en fonction de  $G, K_0, k$  et  $\mu_c$ .

**A-12.** On désigne par  $y=y_n(x)$  la solution de cette équation (1) pour  $n$  donné. Justifier les conditions limites  $y_n(0)=1$  et  $\frac{dy_n}{dx}(0) = 0$  Vérifier que pour  $n=1$  la solution est donnée

par  $y_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

**A-13.** Pour quelles valeurs cette fonction s'annule-t-elle ? En déduire l'expression du rayon de l'étoile en fonction des données.

Calculer sa valeur. Pour déterminer  $K_0$  on utilisera la pression au centre calculée en A-8 .

### Etude du mouvement de rotation

Dans son référentiel barycentrique  $R^*$  l'étoile tourne autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\Omega$ .

**A-14.** I désigne le moment d'inertie de la sphère par rapport à son axe de rotation ( $I = \frac{2}{5} MR^2$ ) quelle est l'énergie cinétique de l'étoile dans  $R^*$  ?

**A-15.** Relier la période de rotation  $T$  à la vitesse angulaire. Dans le cas d'un freinage de l'étoile, relier la variation de son énergie cinétique à la dérivée  $\frac{dT}{dt}$ .

**A-16.** On considère une particule de masse  $m$  liée à l'étoile en un point  $M$ . On commence par la repérer en coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$  Exprimer sa vitesse dans  $R^*$  Déterminer la force d'inertie d'entraînement subie par la particule. Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle d'entraînement  $E_{pie} = -\frac{m\Omega^2 \rho^2}{2}$  . En quels points de l'étoile cette énergie potentielle est elle maximale ?

**A-17.** En considérant la résultante des forces de gravitation et d'inertie d'entraînement pour une particule matérielle située à l'équateur en déduire une condition sur la vitesse angulaire; exprimer la période en fonction de la masse volumique

**A-18** Calculer la période pour une naine blanche ( $\mu_c=10^9 \text{ kg.m}^{-3}$ ) et pour une étoile à neutrons ( $\mu_c=10^{15} \text{ kg.m}^{-3}$ )

**A-19** Déterminer la vitesse de libération sur l'équateur. Déterminer une condition pour que la lumière ne s'échappe pas de l'étoile. De quel objet s'agit il ?

### **B) Electromagnétisme**

On suppose que le pulsar possède un champ magnétique de type dipolaire qui est engendré par un dipôle de moment magnétique  $\vec{M}_0$  centré sur le coeur  $O$  de l'étoile.