Devoir d'entraînement de physique nº 2

Cet énoncé comporte un problème de thermodynamique et deux petits problèmes de mécanique.

Problème A
(Agro-Véto 2017)

Bioénergétique de la Chouette Harfang

Le Harfang des neiges (*Bubo scandiacus* ou *Nyctea scandiaca*), appelé aussi Chouette Harfang, est un oiseau de l'ordre des Strigiformes, qui comprend les rapaces nocturnes tels que les chouettes et les hiboux (**Figure 1**). Le Harfang vit principalement dans la toundra arctique où il se reproduit vers février-mars. Il se nourrit principalement de lemmings qui sont de petits rongeurs vivant dans le même milieu. Le harfang peut occasionnellement visiter des régions situées plus au sud, particulièrement quand les populations de lemmings se raréfient. Les harfangs sont des oiseaux de grande taille dont les mensurations sont les suivantes : poids moyen des femelles : 2,120 kg ; poids moyen des mâles : 1,730 kg ; envergure : environ 150-160 cm ; longueur : environ 60 cm. Ce sont en moyenne les plus grands Strigiformes d'Amérique du Nord, le Grand-Duc d'Europe *Bubo bubo* étant plus grand. L'objectif du problème est d'étudier la capacité des harfangs à résister au froid rigoureux et aux vents parfois violents qui règnent dans la toundra en hiver, ainsi que leurs besoins énergétiques.

Figure 1. Harfang des neiges (à droite : en chasse).

Partie 1 : Conduction thermique

Les résultats des questions 1.10 et 1.11 sont utiles pour traiter les parties suivantes.

1.1) Écrire la loi de Fourier en donnant le nom et l'unité, dans le Système International, de toutes les grandeurs figurant dans cette loi.

1.2) On considère un solide de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ. Établir, dans le cas d'un transport unidirectionnel (direction repérée par l'abscisse x), un bilan local d'énergie, en l'absence de sources volumiques et sans échange à travers des parois latérales. En déduire une équation aux dérivées partielles pour la température dans le solide et préciser l'expression de la diffusivité thermique.

1.3) Indiquer en quelle unité s'exprime la diffusivité thermique d'un milieu.

1.4) L'une des extrémités du solide (en $x = 0$) est maintenue à la température T_1 alors que l'autre extrémité (en $x = \ell$) est maintenue à la température T_2 ($T_2 < T_1$). On se place dorénavant en régime permanent. Indiquer dans quel sens a lieu le transfert d'énergie par conduction thermique.

1.5) Établir, en régime permanent, l'expression de la température dans le solide en fonction de l'abscisse x pour x compris entre 0 et ℓ ($0 \leqslant x \leqslant \ell$).

1.6) Écrire l'expression de la résistance thermique, après avoir donné sa définition et précisé son unité. Donner aussi l'expression de la conductance thermique, définie comme l'inverse de la résistance thermique.

Pour établir des bilans énergétiques sur la chouette harfang, il est nécessaire d'étudier une géométrie définissant un volume corporel fini. Un modèle très simplifié, mais fournissant malgré tout des résultats qualitativement significatifs, est constitué par une géométrie sphérique. On suppose que le corps de l'oiseau est une sphère homogène de centre O, de rayon R et de masse volumique ρ, maintenue à la température corporelle T_i. Il est enveloppé par une couche isolante d'épaisseur e représentant le plumage (**Figure 2**). La distance au centre O est repérée par la coordonnée radiale r. On étudie la conduction thermique dans le plumage avec comme conditions aux limites : $T(r=R)=T_i$; $T(r=R+e)=T_e$. La température T_e est la température extérieure (ambiante). Elle est inférieure à T_i. Il n'y a pas de source volumique dans le plumage.

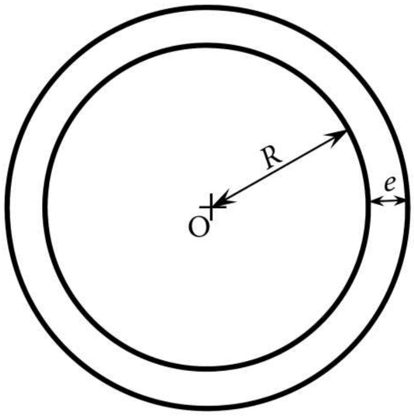


Figure 2. Transport en géométrie sphérique.

1.7) Justifier que la température ne dépend que de r et en déduire l'expression découlant de la loi de Fourier du vecteur densité de flux thermique dans le plumage. On notera λ la conductivité thermique de celui-ci. Préciser la direction et le sens de ce vecteur.

1.8) En utilisant les symétries, établir l'expression du flux thermique à travers une sphère de centre O et de rayon r compris entre R et $R+e$, en fonction de λ, r et de la dérivée $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$.

1.9) Justifier que le flux thermique est constant en régime permanent si r est compris entre R et $R+e$.

1.10) Établir l'expression de la résistance thermique du plumage. Vérifier que l'expression de sa conductance thermique G_{th} s'écrit sous la forme

$$G_{\mathrm{th}}=\alpha\frac{\lambda R(R+e)}{e}.$$

Dans cette expression, α est un nombre sans dimension que l'on précisera.

1.11) On note S la surface corporelle (plumage exclu). Dans le cas où e est très petit devant R, montrer que la conductance thermique peut s'écrire :

$$G_{\mathrm{th}}=\frac{\lambda S}{e}$$

Partie 2 : Taille de l'oiseau et résistance au froid

2.1) En notant m la masse de l'oiseau, on définit la conductance thermique rapportée à l'unité de masse corporelle par : $G_m=G_{\mathrm{th}}/m$. Expliquer pourquoi G_m est une grandeur pertinente pour estimer les capacités de résistance au froid d'un animal.

2.2) Établir l'expression de G_m pour le plumage en géométrie sphérique (voir les questions 1.7 à 1.11) en fonction de λ, R, e et ρ, dans le cas général puis dans le cas où e est très petit devant R. On pourra utiliser le coefficient α de la question 1.10 si sa valeur n'a pas été déterminée.

2.3) On compare deux oiseaux de masses respectives m_1 et m_2. On suppose que les corps de ces oiseaux sont sphériques, de même masse volumique ρ et qu'ils ont la même épaisseur de plumage e, les conductivités thermiques étant aussi les mêmes. Établir l'expression du rayon corporel (plumage exclu) en fonction de la masse en négligeant la masse du plumage. Calculer numériquement les rayons corporels de ces deux oiseaux, respectivement R_1 et R_2. Données : $m_1=2{,}0\ \mathrm{kg}$; $m_2=10\ \mathrm{g}$; $\rho=1{,}0\cdot10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

2.4) Calculer numériquement le rapport x des conductances thermiques par unité de masse corporelle des deux oiseaux de la question 2.3, notées respectivement G_{m1} et G_{m2} : $x=G_{m1}/G_{m2}$. On utilisera les données et les hypothèses des questions précédentes. Donnée : $e=1{,}0\ \mathrm{cm}$.

2.5) L'estimation de la surface corporelle d'un oiseau à partir de la mesure de sa masse est souvent obtenue à partir de la relation empirique suivante, où S est la surface corporelle exprimée en cm^2 et m la masse de l'oiseau exprimée en g :

$$S=10\,m^{2/3}.$$

Justifier la valeur de l'exposant $2/3$ de cette relation.

2.6) En analysant les résultats des questions précédentes et sur la base d'une épaisseur de plumage constante, discuter l'effet de la taille sur la capacité des oiseaux à vivre dans des climats très froids.

2.7) Le tableau suivant présente quelques données numériques moyennes obtenues à partir de mesures réalisées sur 62 espèces d'oiseaux de tailles diverses.

Masse de l'oiseau (g)	10	25	50	100	500
Nombre de plumes	1418	1672	1896	2147	2868
Nombre de plumes par unité de masse corporelle (g^{-1})	142	67	38	21	6
Nombre de plumes par unité de surface corporelle (cm^{-2})	31	19	14	10	4,6
Masse du plumage (g)	0,6	1,5	2,9	5,6	26,3
Masse du plumage par unité de masse corporelle ($mg \cdot g^{-1}$)	62	60	58	56	53
Masse du plumage par unité de surface corporelle ($mg \cdot cm^{-2}$)	13	17	21	26	42

Analyser ces résultats en essayant notamment de préciser comment, en moyenne, l'épaisseur du plumage varie en fonction de la masse d'un oiseau. On justifiera la réponse et on indiquera si les variations des caractéristiques du plumage des oiseaux avec leur taille renforcent ou non l'effet discuté à la question 2.6 sur le lien entre la taille et la résistance aux climats froids.

Problème B

Mouvement à force centrale

Soit O un point fixe du référentiel terrestre (supposé galiléen), et U et a deux constantes positives. Une particule P de masse m est soumise uniquement à la force $\vec{F} = F_r(r)\overrightarrow{e_r} = \dfrac{2U}{a}\left(\dfrac{a^3}{r^3} - \dfrac{a^2}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r}$, avec $\overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{e_r}$. Ce modèle permet de représenter grossièrement les mouvements de rotation et de vibration des molécules diatomiques.

À l'instant $t = 0$, la position et la vitesse de P sont données par $\overrightarrow{OP_0} = a\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v_0} = -v_0\,\overrightarrow{e_y}$ avec $v_0 = \sqrt{\dfrac{U}{m}}$.

1. Déterminer l'énergie potentielle $E_\text{p}(r)$ associée à cette force, en la supposant nulle à l'infini.

2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ de P au point O est constant au cours du mouvement, et déterminer la valeur de cette constante. En déduire que le mouvement a lieu dans un plan à préciser. Exprimer $\vec{L}$ en coordonnées polaires.

3. Montrer que l'énergie mécanique E du mobile reste constante, et déterminer sa valeur en fonction de U.

4. Montrer que l'on peut écrire : $E = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_\text{p,eff}(r)$ en précisant l'expression de $E_\text{p,eff}(r)$ en fonction de U, a et r. Tracer schématiquement le graphe de $E_\text{p,eff}(r)$; on recherchera tout d'abord les points particuliers de cette courbe (zéro et extremum).

5. Si le mobile peut parvenir à l'infini, quelle est alors sa vitesse, ou bien s'il ne parvient pas à l'infini, quelles sont les valeurs minimale r_min et maximale r_max prises par r au cours du mouvement ?

Problème C

(CCINP MP 2008)

Accélérographe à oscillateur

Dans un référentiel R galiléen muni du repère cartésien (O, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$), on considère un corps solide (S) de masse $m = 0{,}1$ kg et de centre d'inertie G pouvant se déplacer sans frottement solide le long de l'axe horizontal Ox (cf. figure 1) ; G est relié au point E par un ressort de raideur k ; (S) est en outre soumis à une force de frottement visqueux de la forme $-\beta\vec{V}(G)$ où $\vec{V}(G)$ est la vitesse de G par rapport à E.

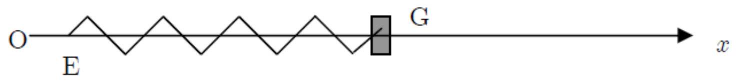


Figure 1

On repère la position de G par l'écart à la position d'équilibre l_o par la relation $x = EG - l_o$.

1. Détermination des caractéristiques de l'oscillateur

Dans un premier temps, E est fixe en O.

On écarte G de sa position d'équilibre vers la droite, d'une distance $x_o = 10$ cm et on le lâche sans vitesse initiale.

1-a) Déterminer l'équation du mouvement ; on posera $\omega_o^2 = \dfrac{k}{m}$ et $2\lambda = \dfrac{\beta}{m}$.

1-b) Déterminer $x(t)$ dans le cas d'un régime pseudo-périodique.

1-c) La durée séparant 10 passages de G par la position d'équilibre, de droite à gauche, est $\Delta t = 12\,\text{s}$. Par ailleurs, l'amplitude de la dixième oscillation est $x_1 = 7{,}5\,\text{cm}$.
En déduire les valeurs de la pseudo pulsation, de β et de k.

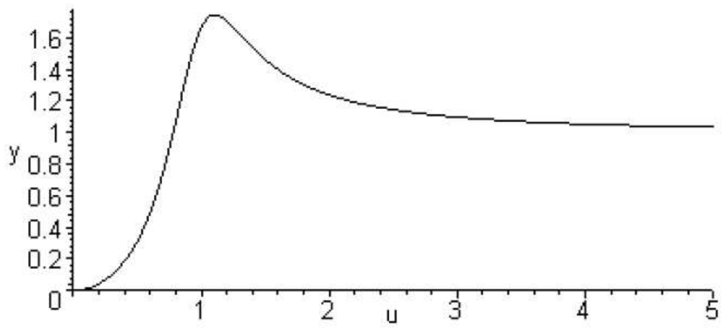
2. Mesure d'une accélération

Dans cette question le point E est solidaire d'un solide en vibration dans R. Sa position est donnée par $\overrightarrow{OE} = a\cos(\omega t)\vec{e}_x$.

2-a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

2-b) Déterminer $x(t)$ en régime forcé (ou permanent).

2-c) Le tracé de l'amplitude X_o des oscillations en fonction de la pulsation a l'allure suivante en coordonnées réduites $y = \dfrac{X_o}{a}$ en fonction de $u = \dfrac{\omega}{\omega_o}$:



Que représente le maximum de cette courbe ? Cette situation se présente-t-elle pour toute valeur du coefficient d'amortissement ?
Déduire graphiquement l'amplitude a dans le cas où, pour $\omega = 7$ rad.s^{-1}, on mesure $X_o = 0{,}2\,\text{m}$.

2-d) Exprimer puis calculer la puissance moyenne dissipée par les frottements.