Mc1 – Corrigé des exercices 2, 3, 4, 5

Exercice 2

a) Pendant une durée dt, la distance parcourue dx est égale à la longueur de l'arc de cercle $a\,\mathrm{d}\theta$ (portion de la roue ayant touché le sol). En divisant par dt on obtient $\boxed{v = a\dot{\theta}}$ $(= \text{cte})$.

b) On intègre : $\theta(t) = \dfrac{v}{a}t + A$ avec $\theta(0) = A = 0$, soit $\boxed{\theta(t) = \dfrac{v}{a}t}$.

c) $\mathfrak{R}'$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathfrak{R}$.

Dans $\mathfrak{R}'$, M tourne autour du point fixe C à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$: le mouvement de M dans $\mathfrak{R}'$ est circulaire uniforme.

d) Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{v_e}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}$.

Le référentiel $\mathfrak{R}'$ étant en translation rectiligne dans $\mathfrak{R}$: $\vec{v_e}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} = \vec{v}(C)_{\mathfrak{R}} = v\,\vec{e_x}$.

D'autre part, pour M en mouvement circulaire uniforme dans $\mathfrak{R}'$: $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} = a\dot{\theta}\,\vec{j} = v\,\vec{j}$.

Donc $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = v\left(\vec{e_x} + \vec{j}\right) = v(1-\cos\theta)\vec{e_x} + v\sin\theta\,\vec{e_z}$ soit $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)\vec{e_x} + v\sin\dfrac{vt}{a}\vec{e_z}}$.

Loi de composition des accélérations : $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{a_e}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} + \vec{a_c}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}$.

Or $\vec{a_c}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} = \vec{0}$ (translation) et $\vec{a_e}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} = \vec{a}(C)_{\mathfrak{R}} = \vec{0}$ (mouvement de C rectiligne uniforme). Et l'accélération de M dans $\mathfrak{R}'$ est dirigée vers le centre du cercle :

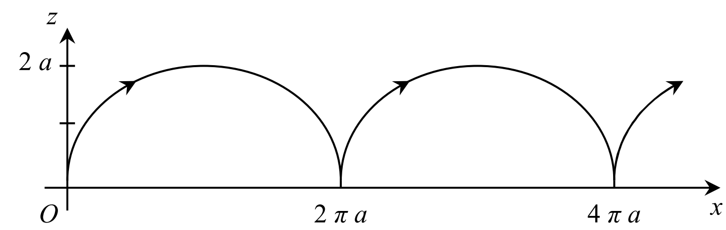
$\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} = -a\dot{\theta}^2\vec{i} = -\dfrac{v^2}{a}\vec{i} = -\dfrac{v^2}{a}\left(-\sin\theta\,\vec{e_x} - \cos\theta\,\vec{e_z}\right)$. Donc $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \dfrac{v^2}{a}\left(\sin\dfrac{vt}{a}\vec{e_x} + \cos\dfrac{vt}{a}\vec{e_z}\right)}$.

e) Projections de la vitesse : $\dot{x}(t) = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)$ et $\dot{z}(t) = v\sin\dfrac{vt}{a}$. On intègre par rapport à t : $x(t) = v\left(t - \dfrac{a}{v}\sin\dfrac{vt}{a}\right) + B$ et

$z(t) = -v\dfrac{a}{v}\cos\dfrac{vt}{a} + C$. Et avec les conditions initiales $x(0) = z(0) = 0$: $\boxed{x(t) = vt - a\sin\dfrac{vt}{a}}$ et $\boxed{z(t) = a\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)}$.

z oscille entre 0 et $2a$, tandis que x augmente toujours (puisque $\dot{x}(t) \geq 0$).

Lorsque $\dfrac{vt}{a} = 2k\pi$, $x(t) = 2k\pi a$, $z(t) = 0$ et $\dot{x}(t) = \dot{z}(t) = 0$.



f) Lorsque le caillou quitte la roue, sa vitesse initiale a une composante $\dot{x}(t) = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)$ qui ne peut être que positive (ou nulle s'il est sur le sol). Il est ensuite en chute libre en gardant cette vitesse horizontale : le caillou ne peut partir que vers l'avant.

Exercice 3

a) L'ascenseur ne peut se déplacer qu'en translation verticale, on peut donc le traiter comme un point matériel. On lui applique le PFD dans le référentiel terrestre : $M\,\vec{a_{\text{asc}}} = M\,\vec{g}$ d'où $\boxed{\vec{a_{\text{asc}}} = \vec{g}}$.

Dans le référentiel de l'ascenseur, en translation rectiligne accélérée donc non galiléen, la balle est soumise à son poids et on y ajoute la force d'inertie d'entraînement $\vec{F_{\text{ie}}} = -m\,\vec{a_e} = -m\,\vec{a_{\text{asc}}} = -m\,\vec{g}$. On lui applique alors le PFD : $m\,\vec{a_b} = \vec{P} + \vec{F_{\text{ie}}} = m\,\vec{g} - m\,\vec{g} = \vec{0}$ donc $\vec{v_b} = \vec{\text{cte}}$. La balle est pseudo-isolée dans le référentiel de l'ascenseur et son mouvement est donc rectiligne uniforme (ou elle reste immobile si elle l'était initialement). Le poids semble donc avoir disparu : c'est le phénomène d'impesanteur (ou apesanteur).

b) S'il y a des frottements, l'ascenseur va accélérer de moins en moins jusqu'à atteindre une vitesse limite constante : son référentiel redevient alors galiléen. Toto verra donc le poids de la balle réapparaître petit à petit, et finalement la situation revenir à la normale (en attendant d'atteindre le rez-de-chaussée !).

Exercice 4

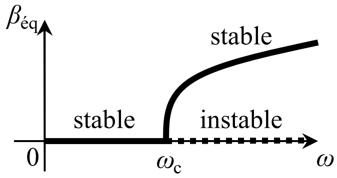
(Questions a *et* b *traitées en classe)*

c) $E_p = -mg\ell\cos\beta - \dfrac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\beta\ (+\text{cte})$. Pour chercher un extremum, on cherche les valeurs de β pour lesquelles la dérivée s'annule : $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\beta} = +mg\ell\sin\beta - m\omega^2\ell^2\sin\beta\cos\beta = 0 \Leftrightarrow \sin\beta\left(g - \omega^2\ell\cos\beta\right) = 0$. C'est l'équation déjà obtenue avec le PFD, qui donne $\boxed{\beta_1 = 0}$ (toujours possible) et $\boxed{\beta_2 = \arccos\dfrac{g}{\omega^2\ell}}$ si $\boxed{\omega > \sqrt{\dfrac{g}{\ell}} = \omega_c}$.

Pour la stabilité de β_2, plutôt que de dériver encore une fois (ce qui donnerait une expression compliquée), on regarde le signe de la dérivée première à gauche et à droite de l'extremum. Pour β légèrement inférieur à β_2, $\cos\beta > \cos\beta_2$ donc la parenthèse est négative, et par ailleurs $\sin\beta_2 > 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\beta} < 0$; de même, pour β légèrement supérieur à β_2, $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\beta} > 0$. La fonction est décroissante avant β_2 puis croissante après, β_2 correspond donc à un <u>minimum</u> de E_p, c'est-à-dire à une <u>position d'équilibre stable</u>.

d) Pour $\beta \ll 1$: $\cos\beta \approx 1-\dfrac{\beta^2}{2}$ et $\sin\beta \approx \beta$ donc $E_\mathrm{p} = -mg\ell\left(1-\dfrac{\beta^2}{2}\right)-\dfrac{1}{2}m\omega^2\ell^2\beta^2\ (+\mathrm{cte}) = \dfrac{m\ell}{2}\left(g-\omega^2\ell\right)\beta^2 + \mathrm{cte}$. La courbe représentative est un arc de parabole d'axe vertical, d'extremum $\beta_1 = 0$. Si $\omega < \omega_\mathrm{c}$, le coefficient de β^2 est positif, donc la parabole est courbée vers le haut, donc $\beta_1 = 0$ est un <u>minimum</u> (équilibre <u>stable</u>). Si $\omega > \omega_\mathrm{c}$, le coefficient de β^2 est négatif, donc la parabole est courbée vers le bas et $\beta_1 = 0$ est un <u>maximum</u> (équilibre <u>instable</u>).

e) Il y a une « bifurcation » à partir de $\omega = \omega_\mathrm{c}$: la position d'équilibre unique stable devient instable, et une nouvelle position d'équilibre stable apparaît.



<u>Exercice 5</u>

a) On étudie la bille M de masse m, en chute libre dans le référentiel R du manège. Forces appliquées à M : poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$; force d'inertie d'entraînement $\vec{F_\mathrm{ie}} = -m\,\vec{a_\mathrm{e}}(M) = +m\omega^2\,\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté de M sur l'axe (Oz), soit $\vec{F_\mathrm{ie}} = m\omega^2\left(x\vec{e_x}+y\vec{e_y}\right)$; force d'inertie de Coriolis $\vec{F_\mathrm{ic}} = -m\,\vec{a_\mathrm{c}}(M) = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_R = -2m\omega\vec{e_z}\wedge\left(\dot{x}\vec{e_x}+\dot{y}\vec{e_y}+\dot{z}\vec{e_z}\right) = 2m\omega\left(\dot{y}\vec{e_x}-\dot{x}\vec{e_y}\right)$.

PFD pour M dans R : $\vec{P}+\vec{F_\mathrm{ie}}+\vec{F_\mathrm{ic}} = m\vec{a}(M)_R$. Projections sur la base $\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$: $\begin{cases} 0+m\omega^2x+2m\omega\dot{y} = m\ddot{x} \quad (1)\\ 0+m\omega^2y-2m\omega\dot{x} = m\ddot{y} \quad (2)\\ -mg+0+0 = m\ddot{z} \quad (3).\end{cases}$

b) On intègre deux fois l'équation (3) : $\dot{z} = -gt+0$ (vitesse initiale nulle par rapport au manège) puis $\boxed{z = -\dfrac{1}{2}gt^2+h}$ [car $z(0) = h$].

c) Les autres sont couplées et ne peuvent donc être résolues séparément. On pose donc $u = x + i\,y$ et on détermine l'équation différentielle pour u : $(1)+i(2) \Leftrightarrow m\omega^2u-2im\omega\dot{u} = m\ddot{u}$ soit $\ddot{u}+2i\omega\dot{u}-\omega^2u = 0$. Équation caractéristique : $r^2+2i\omega r-\omega^2 = 0$. $\Delta = -4\omega^2+4\omega^2 = 0$ donc la racine double est $r = -i\omega$. Alors $u(t) = (At+B)\exp(-i\omega t)$ avec deux constantes A et B (a priori complexes) à déterminer avec les conditions initiales. $u(0) = B = x(0)+i\,y(0) = r_0$; $\dot{u}(0) = A-i\omega B = \dot{x}(0)+i\,\dot{y}(0) = 0$ d'où $A = i\omega r_0$; donc $u(t) = r_0(i\omega t+1)\exp(-i\omega t)$. Finalement : $\boxed{x(t) = r_0(\cos\omega t+\omega t\sin\omega t)\ ;\ y(t) = r_0(\omega t\cos\omega t-\sin\omega t)}$.

d) La bille touche le sol quand $z = 0$, soit $\boxed{\tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0{,}55\,\mathrm{s}}$. Alors $\boxed{x(\tau) = 5{,}7\,\mathrm{m}\ ;\ y(\tau) = -0{,}27\,\mathrm{m}}$.

e) Dans R_1 la seule force est le poids : $\vec{P} = m\vec{a}(M)_{R_1}$. Projections du PFD : $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 0$; $\ddot{z}_1 = -g$. On intègre deux fois : $x_1 = \mathrm{cte} = r_0$; $y_1 = v_0t+0 = r_0\omega t$; $z_1 = -\dfrac{1}{2}gt^2+h$. Il s'agit d'une trajectoire parabolique, d'axe (M_0z_1), dans le plan vertical ($M_0y_1z_1$). À l'instant τ calculé précédemment : $\boxed{x_1(\tau) = 5{,}0\,\mathrm{m}\ ;\ y_1(\tau) = 2{,}8\,\mathrm{m}}$.