

Corrigé du devoir test de physique n° 2

▣ **Problème A** (E3A MPI 2023)

Q1. Un référentiel galiléen est un référentiel vérifiant le principe d'inertie : dans un tel référentiel, tout point matériel isolé a une vitesse constante (mouvement rectiligne uniforme ou immobilité). Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen si on se limite au voisinage de la surface de la Terre et à des durées faibles devant 1 jour (période de rotation propre de la Terre).

Q2. $\vec{F}_G = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}_r$. E_p est définie par : $dE_p = -\vec{F}_G \cdot d\vec{OP} = G \frac{M_T m}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi) = G \frac{M_T m}{r^2} dr$ donc E_p

ne dépend que de r . On intègre : $E_p(r) = -G \frac{M_T m}{r} + cte$. Si on choisit $E_p(\infty) = 0$, la constante est nulle, soit $E_p(r) = -G \frac{M_T m}{r}$.

Q3. On dit que le mouvement est lié si les valeurs possibles de r sont bornées : M ne peut pas s'éloigner à l'infini. Il faut pour cela avoir $E_m < 0$ (valeur maximale nulle). Ceci se démontre à l'aide de l'énergie potentielle effective, mais ce n'est pas demandé ici.

Q4. Pour que le projectile puisse se soustraire à l'attraction terrestre, il faut qu'il soit au contraire en état libre (ou de diffusion), soit $E_m > 0$ si on peut négliger toute force non conservative (en l'occurrence, les frottements de l'atmosphère). S'il part de la surface de la

Terre ($r = R_T$) avec une vitesse v_0 : $\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{M_T m}{R_T} > 0$ d'où $v_0 > \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = v_{lib}$. AN $v_{lib} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q5. D'après le PFD, la dimension d'une force est $\dim F = M \cdot L \cdot T^{-2}$. L'expression donnée a pour dimension : $\dim\left(\frac{mv}{\ell_f}\right) = \frac{M \cdot L \cdot T^{-1}}{L} \cdot L \cdot T^{-1} = M \cdot L \cdot T^{-2}$ ce qui est bien identique si le paramètre ℓ_f est une longueur.

Q6. La vitesse initiale du boulet étant inférieure à la vitesse de libération calculée à la question 4, le boulet ne peut pas s'éloigner à l'infini : il atteint donc une hauteur (distance) maximale avant de retomber.

Q7. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le PFD au boulet, soumis à son poids et à la force de frottement :

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_f$. Projection sur \vec{u}_z pendant la phase ascendante : $m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{mv^2}{\ell_f}$ soit $\frac{dv}{dt} = -g - \frac{v^2}{\ell_f}$ (phase ascendante).

Projection sur \vec{u}_z pendant la phase descendante : $-m \frac{dv}{dt} = -mg + \frac{mv^2}{\ell_f}$ soit $\frac{dv}{dt} = +g - \frac{v^2}{\ell_f}$ (phase descendante).

Q8 et Q9. Une vitesse limite asymptotique correspond à $\frac{dv}{dt} \rightarrow 0$. Dans la phase descendante, cela équivaut à $v^2 \rightarrow g\ell_f$, soit

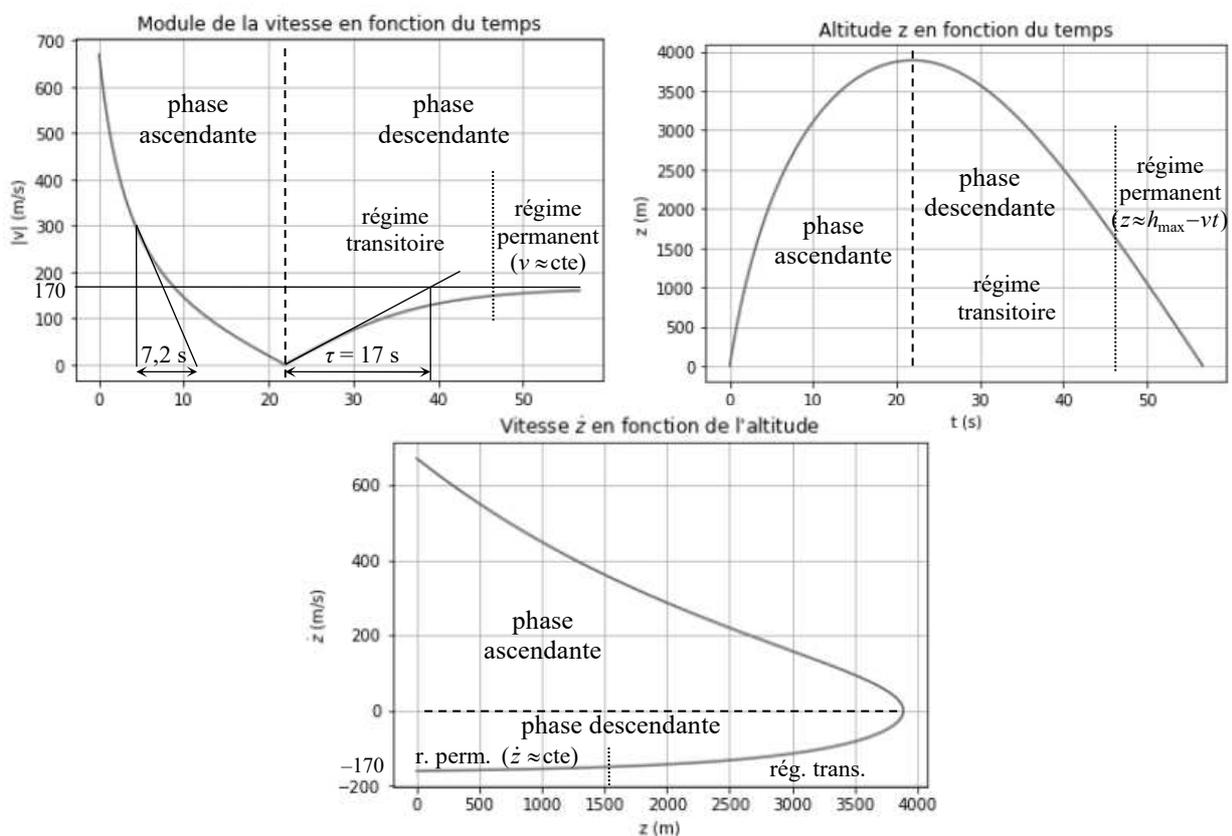
$v \rightarrow \sqrt{g\ell_f} = v_{lim}$. Dans la phase ascendante, cela donnerait $v^2 \rightarrow -g\ell_f$: c'est impossible, il n'y a alors pas de vitesse asymptotique.

Q10. La phase descendante comporte d'abord un régime transitoire où la vitesse croît de $v = 0$ jusqu'à une valeur proche de v_{lim} (par exemple $0,99 v_{lim}$). Pour évaluer le temps caractéristique de ce régime, associé à l'équation différentielle sans second membre

$\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\ell_f} = 0\right)$, on peut l'écrire en ordres de grandeur : $\frac{v_{lim}}{\tau} \sim \frac{v_{lim}^2}{\ell_f}$, d'où $\tau \sim \frac{\ell_f}{v_{lim}} = \sqrt{\frac{\ell_f}{g}}$.

Puis elle atteint un régime permanent où $v \approx v_{lim}$: le mouvement est alors rectiligne uniforme, avec $\vec{v} = -v_{lim} \vec{u}_z$.

Q11.



Q12. Réécrivons les équations différentielles avec les variables réduites proposées (sans dimension), en multipliant chaque membre par $\frac{\tau}{v_{\text{lim}}} = \frac{1}{g}$. Phase ascendante : $\frac{\tau}{v_{\text{lim}}} \frac{dv_+}{dt} = -1 - \frac{v_+^2}{g\ell_f}$ soit $\frac{d\tilde{v}_+}{d\tilde{t}} = -1 - \tilde{v}_+^2$. On sépare les variables : $\frac{d\tilde{v}_+}{1 + \tilde{v}_+^2} = -d\tilde{t}$. Puis on intègre

entre 0 et \tilde{t} quelconque : $\arctan(\tilde{v}_+) - \arctan(\tilde{v}_0) = -\tilde{t}$ soit $\tilde{v}_+ = \tan(\arctan(\tilde{v}_0) - \tilde{t})$. Finalement on revient aux grandeurs v_+ et t :

$$v_+(t) = v_{\text{lim}} \tan\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_{\text{lim}}}\right) - \frac{t}{\tau}\right), \text{ fonction qui décroît à partir de la valeur initiale } v_0. \text{ Cette phase se termine en } t_1 \text{ tel que } v_+(t_1) = 0,$$

soit $t_1 = \tau \arctan\left(\frac{v_0}{v_{\text{lim}}}\right)$. Alors commence la phase descendante, d'équation différentielle : $\frac{d\tilde{v}_-}{d\tilde{t}} = +1 - \tilde{v}_-^2$. L'intégration de $\frac{d\tilde{v}_-}{1 - \tilde{v}_-^2} = d\tilde{t}$

entre \tilde{t}_1 et \tilde{t} donne : $\operatorname{artanh}(\tilde{v}_-) - 0 = \tilde{t} - \tilde{t}_1$ soit $\tilde{v}_- = \tanh(\tilde{t} - \tilde{t}_1)$. Finalement : $v_-(t) = v_{\text{lim}} \tanh\left(\frac{t - t_1}{\tau}\right)$.

Q13. La fonction \tanh tend vers 1 à l'infini, donc $v_- \rightarrow v_{\text{lim}}$, comme établi aux questions 8 et 9. Et le temps caractéristique d'évolution de la phase descendante est bien τ , comme on l'a vu à la question 10.

Q14. On lit sur deux des graphiques : $v_{\text{lim}} = 170 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. On évalue τ avec la tangente à l'origine sur le premier graphique : $\tau = 17 \text{ s}$,

ce qui donne bien $\frac{dv}{dt}(t_1) = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = +g$. Pour évaluer ℓ_f , on peut utiliser l'équation différentielle à un instant quelconque,

par exemple celui où $v_+ = 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: $\frac{dv_+}{dt} = \frac{-300}{7,2} = -42 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ donc $\frac{v^2}{\ell_f} = -g - \frac{dv}{dt} = 32 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ d'où $\ell_f = 2800 \text{ m}$.

On peut alors vérifier $v_{\text{lim}}\tau = 2900 \text{ m} \approx \ell_f$ et $\sqrt{g\ell_f} = 170 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx v_{\text{lim}}$.

Q15. On a supposé le champ de pesanteur g uniforme, or il décroît avec l'altitude z : $g(z) \approx G \frac{M_T}{(R_T + z)^2}$. Ici, l'altitude maximale est

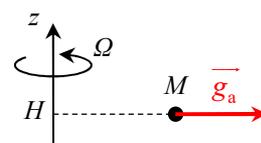
$z_{\text{max}} = 3900 \text{ m}$ d'après les graphiques, donc $\frac{g(z_{\text{max}})}{g(0)} = \frac{R_T^2}{(R_T + z_{\text{max}})^2} = 0,999$, donc l'hypothèse de la pesanteur uniforme convient.

Concernant la forme quadratique (en v^2) de la force de frottement, elle est utilisée en balistique, c'est-à-dire pour des objets rapides dans l'air (très peu visqueux). *La justification plus précise nécessite le cours de dynamique des fluides : cette forme convient pour un grand nombre de Reynolds (supérieur à 1000 environ).* Ici, ce modèle convient donc en début et en fin de mouvement, où le boulet est très rapide, mais ne convient plus au voisinage du sommet, quand sa vitesse devient faible.

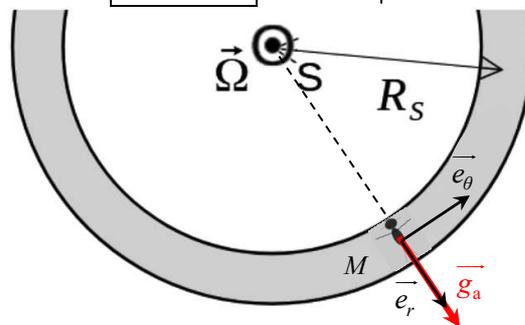
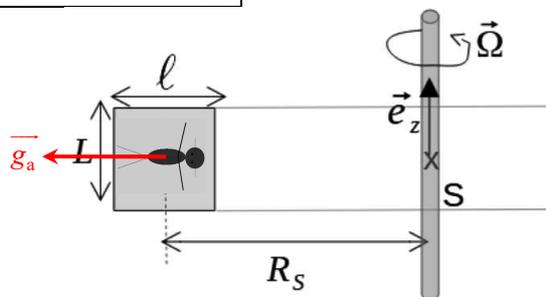
Q16. Le point M est soumis à la force gravitationnelle $\vec{F}_g = -G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r$ et éventuellement à des forces de contact (réaction du plancher...). Et du fait que le référentiel de la capsule C n'est pas galiléen (car C est en translation *circulaire* par rapport à la Terre), M subit aussi une force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{\text{ic}} = -m \vec{a}_c(M) = -m \vec{a}(C)_{\mathcal{R}_{\text{géoc}}}$. (En revanche il ne subit pas de force d'inertie de Coriolis, puisque le référentiel de C n'est pas en rotation.)

Q17. L'impesanteur est la disparition apparente de la force gravitationnelle due à la Terre (assimilable au poids à la surface de la Terre), due au fait qu'elle est compensée par la force d'inertie d'entraînement. Pour déterminer celle-ci, on applique le PFD à la capsule C elle-même : $m_C \vec{a}(C)_{\mathcal{R}_{\text{géoc}}} = \vec{F}_{g \text{ Terre} \rightarrow C} = m_C \vec{\mathcal{G}}_T(C)$ donc $\vec{a}(C)_{\mathcal{R}_{\text{géoc}}} = \vec{\mathcal{G}}_T(C) = -G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r$. Alors on a bien $\vec{F}_g + \vec{F}_{\text{ic}} = \vec{0}$.

Q18. Si la station était en translation, comme ci-dessus, les objets et les personnes seraient en impesanteur. Mais du fait de la rotation de la station, dans son référentiel un point M subit une force d'inertie d'entraînement supplémentaire $\vec{F}_{\text{ic}} = -m \vec{a}_c(M) = +m \Omega^2 \overline{HM}$ où H est son projeté sur l'axe de rotation. Cette force est ressentie comme un poids artificiel, de la forme $\vec{P}_a = m \vec{g}_a$ avec $\vec{g}_a = \Omega^2 \overline{HM}$.



Q19. $\vec{g}_a = \Omega^2 r \vec{e}_r \approx \Omega^2 R_S \vec{e}_r$. Le « bas » est donc le bord extérieur.



La figure 8A n'est donc pas réaliste, car on y voit des fenêtres sur le bord extérieur, qui seraient donc sous les pieds des passagers. La figure 8B est plus réaliste, avec des fenêtres (peu visibles !) sur les bords latéraux des tores.

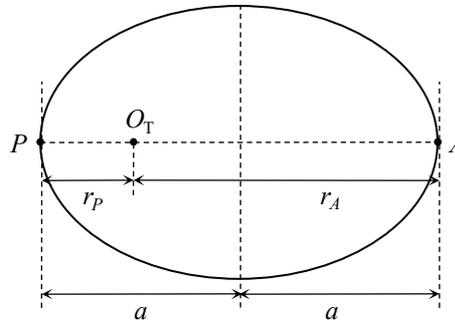
Q20. On veut avoir $g_a = \Omega^2 R_S = g$, soit $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R_S}}$. AN $\Omega = 0,3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 3 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

Q21. La vitesse angulaire ci-dessus semble beaucoup trop grande pour pouvoir être communiquée à une station orbitale. Et une station plus petite (ce qui est peut-être le cas de l'ISS) devrait tourner encore plus vite.

Q22. Le « poids » d'un astre n'est pas défini, puisqu'un astre ne se trouve pas sur la Terre (ni sur un autre astre) : c'est donc uniquement sa masse qu'on peut définir et mesurer.

Q23. Le périégée P est le point de la trajectoire le plus proche de la Terre. L'apogée A est le point le plus éloigné.

On lit sur le schéma : $a = \frac{r_P + r_A}{2}$.



Q24. Pour obtenir une droite, il faut tracer $[Y = a^3]$ en fonction de $[X = T^2]$: sa pente est $\alpha = \frac{GM_T}{4\pi^2}$, d'où $M_T = \frac{4\pi^2 \alpha}{G}$.

(La suite du sujet original était un codage Python de cette méthode.)

▣ **Problème B** (CCINP MP 2019)

Q1. $[\|\vec{j}_Q\|] = [\varphi \cdot L^{-2}] = [M \cdot t^{-3}]$ et $[\|\text{grad } T\|] = [T \cdot L^{-1}]$ donc $[\lambda] = [\varphi \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}] = [M \cdot L \cdot t^{-3} \cdot T^{-1}]$. (Unité SI : $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.)

Q2. Puisque T est une fonction $T(z, t) : \vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z, t) \vec{e}_z$ donc \vec{j}_Q est dirigé selon l'axe (Oz) , et dépend aussi des variables z et t .

Q3. Appliquons le premier principe à une tranche de matériau comprise entre z et $z + dz$, entre les instants t et $t + dt$:

$$dU(t + dt) - dU(t) = \delta W + \delta Q_{\text{entr},z} - \delta Q_{\text{sort},z+dz} \Leftrightarrow dC[T(z, t + dt) - T(z, t)] = 0 + \iint_{S(z)} \vec{j}_Q(z, t) \cdot \vec{e}_z ds dt - \iint_{S(z+dz)} \vec{j}_Q(z + dz) \cdot \vec{e}_z ds dt$$

$$\Leftrightarrow \mu HL dz c [T(z, t + dt) - T(z, t)] = +j_{Qz}(z, t) HL dt - j_{Qz}(z + dz, t) HL dt \quad \text{d'où en divisant par } HL dz dt : \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{Qz}}{\partial z}$$

Avec la loi de Fourier, on obtient finalement : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

Q4. En régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc il reste $\frac{dj_{Qz}}{dz} = 0$ (\vec{j}_Q est indépendant de z) et $\frac{d^2 T}{dz^2} = 0$.

Q5. Solution de l'équation : $T(z) = Az + B$. Conditions aux limites : $T(0) = T_{\text{entrée}} = B$ et $T(e) = T_{\text{sortie}} = Ae + T_{\text{entrée}}$ donc

$$T(z) = \frac{T_{\text{sortie}} - T_{\text{entrée}}}{e} z + T_{\text{entrée}}. \text{ Puissance : } \varphi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot \vec{e}_z ds = j_{Qz} HL = -\lambda \frac{dT}{dz} HL \text{ soit } \varphi = \lambda HL \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{e} (\forall z).$$

Q6. Par définition : $R_{\text{th}} = \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{\varphi}$. On a donc obtenu : $R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda HL}$. Mettre des résistances en parallèle, c'est placer côte à côte plusieurs plaques de matériau entre les mêmes températures, de sorte que le flux thermique se partage entre ces différentes plaques. Mettre des résistances en série, c'est superposer des couches de matériau, de sorte que le flux thermique les traverse successivement.

Q7. On utilise la formule de la question **Q5** : $\lambda_{\text{laine}} = \frac{\varphi e}{S(T_c - T_f)}$.

Q8. La toison est constituée de six plaques de laine d'épaisseur e : deux carrées de surface H^2 et quatre rectangulaires de surface HL .

Elles sont en parallèle, donc la résistance globale vérifie : $\frac{1}{R_{\text{diff}}} = 2 \frac{\lambda H^2}{e} + 4 \frac{\lambda HL}{e} = \frac{\lambda H(2H + 4L)}{e}$ d'où $R_{\text{diff}} = \frac{e}{2\lambda_{\text{laine}} H(H + 2L)}$.

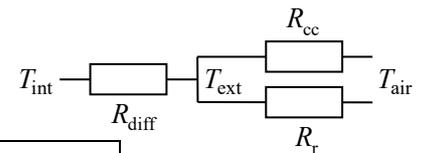
Avant la tonte : $R_{\text{diff},M} = 1,8 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. Avant la tonte : $R_{\text{diff},m} = 0,09 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Q9. La puissance totale des flux conducto-convectifs est la somme de six termes : $\varphi_{\text{cc}} = 4 \times HL \times h(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) + 2 \times H^2 \times h(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})$

$$= 2H(H + 2L)h(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}) \text{ d'où la résistance } R_{\text{cc}} = \frac{1}{2hH(H + 2L)}. \text{ AN } R_{\text{cc}} = 0,18 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Q10. De même $P_r = 2H(H + 2L)K(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})$ d'où $R_r = \frac{1}{2KH(H + 2L)}$. AN $R_r = 0,14 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Q11. La résistance R_{diff} se trouve entre les températures T_{int} (face intérieure de la laine) et T_{ext} (face extérieure), tandis que les deux autres sont entre T_{ext} et T_{air} : autrement dit, le flux thermique traversant la laine traverse ensuite l'interface laine/air sous deux formes qui s'additionnent. Cela correspond au schéma ci-contre. La résistance équivalente R est donc :



$$R = R_{\text{diff}} + \frac{R_{\text{cc}} R_r}{R_{\text{cc}} + R_r}. \text{ Ainsi } R_1 = R_{\text{diff},M} + \frac{R_{\text{cc}} R_r}{R_{\text{cc}} + R_r} = 1,9 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \text{ et } R_2 = R_{\text{diff},m} + \frac{R_{\text{cc}} R_r}{R_{\text{cc}} + R_r} = 0,17 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Q12. Appliquons le premier principe au système {mouton + eau évaporée pendant Δt }, en évolution monobare :

$$\Delta H_{\text{mouton}} + \Delta H_{\text{eau}} = W_{\text{autre que } P + Q} \text{ avec } \Delta H_{\text{mouton}} = 0 \text{ (état stationnaire), } \Delta H_{\text{eau}} = \dot{m} \Delta t \Delta H_{\text{vap}}^\circ, \quad W_{\text{autre que } P} = 0 \text{ et}$$

$$Q = p_{m0} \Delta t - \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{air}}}{R_1} \Delta t. \text{ On en déduit : } p_{m0} = \dot{m} \Delta H_{\text{vap}}^\circ + \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{air}}}{R_1} \text{ (la notation } L \text{ indiquée dans la question est en fait } \Delta H_{\text{vap}}^\circ \text{).}$$

AN $p_{m0} = 18 \text{ W}$ (le premier terme étant négligeable devant le second).

Q13. On remplace \dot{m} par $\dot{m} + \dot{m}' = 3\dot{m}$, et R_1 par R_2 , d'où $p'_{m0} = 3\dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^{\circ} + \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{air}}}{R_2}$. AN $p'_{m0} = 200 \text{ W}$.

Q14.a) Premier principe pour la brebis (en évolution monobare), entre les instants t et $t + dt$: $H(t+dt) - H(t) = \delta W_{\text{autre que } P} + \delta Q$
 $\Leftrightarrow \mu LH^2 c [T(t+dt) - T(t)] = 0 + p_m dt - \frac{T - T_{\text{air}}}{R_1} dt - \dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^{\circ} dt$ (cette fois on n'a pas inclus l'eau dans le système, donc on compte

le transfert thermique qui lui est fourni). On divise par dt : $\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{\text{air}}}{\mu LH^2 c R_1} = \frac{p_m - \dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^{\circ}}{\mu LH^2 c}$. En posant $\tau_1 = \mu LH^2 c R_1$ on obtient

déjà : $\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{\text{air}}}{\tau_1} = \frac{(p_m - \dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^{\circ})R_1}{\tau_1}$. De plus $\dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^{\circ} = p_{m0} - \frac{\theta_{\text{éq}} - T_0}{R_1}$ d'après la formule de **Q12** (où $T_{\text{int}} = \theta_{\text{éq}}$ et $T_{\text{air}} = T_0$).

Finalement : $\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{\text{air}}}{\tau_1} = \frac{T_1 - T_{\text{air}}}{\tau_1}$ avec $T_1 - T_{\text{air}} = (p_m - p_{m0})R_1 + \theta_{\text{éq}} - T_0$.

Q14.b) Solution : $T(t) = T_1 + A \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$. Avec la CI $T(0) = T_1 + A = \theta_{\text{éq}}$ on obtient : $T(t) = T_1 + (\theta_{\text{éq}} - T_1) \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$.

Q14.c) AN $\tau_1 = 7,2 \cdot 10^5 \text{ s} = 8,3 \text{ j}$ et $T_1 = 51 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Sans changement de métabolisme, la brebis atteindrait une température mortelle en quelques jours.

Q15. On suppose ici que la température de la brebis reprend la valeur constante $\theta_{\text{éq}}$, situation vue à la question **Q12**. Autrement dit, la valeur asymptotique T_1 est égale à $\theta_{\text{éq}}$. Alors $T_0 - T_{\text{air}} = (p_m - p_{m0})R_1$ d'où $p_m = p_{m0} + \frac{T_0 - T_{\text{air}}}{R_1}$. AN pour $-8 \text{ }^{\circ}\text{C} < T_{\text{air}} < 15 \text{ }^{\circ}\text{C}$:

$$13 \text{ W} < p_m < 25 \text{ W}.$$

Q16. On obtient de même : $\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{\text{air}}}{\mu LH^2 c R_2} = \frac{p_m - 3\dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^{\circ}}{\mu LH^2 c}$ avec toujours $\dot{m}\Delta H_{\text{vap}}^{\circ} = p_{m0} - \frac{\theta_{\text{éq}} - T_0}{R_1}$, soit $\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{\text{air}}}{\tau_2} = \frac{T_2 - T_{\text{air}}}{\tau_2}$

avec $\tau_2 = \mu LH^2 c R_2$ et $T_2 - T_{\text{air}} = (p_m - 3p_{m0})R_2 + 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)\frac{R_2}{R_1}$. On a donc $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2}{R_1} = 0,09$: la brebis tondue risque donc un coup de chaud ou de froid beaucoup plus rapidement.

L'adaptation de la brebis consiste à revenir à $\theta_{\text{éq}}$, il faut donc avoir $T_2 = \theta_{\text{éq}}$. Alors $T_{\text{air}} = \theta_{\text{éq}} - (p_m - 3p_{m0})R_2 - 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)\frac{R_2}{R_1}$.

La température maximale supportable de l'air correspond au métabolisme le plus faible ($p_{m,\text{min}} = 13 \text{ W}$) : alors $T_{\text{air,max}} = 37 \text{ }^{\circ}\text{C}$.