Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 3

(E3A PSI 2013)

A1. Les couches de fluide glissent les unes sur les autres : les lignes de courant sont rectilignes, parallèles à l'axe (Ox) et orientées vers les x croissants.

A2. En écoulement stationnaire, on cherche la vitesse sous la forme $\vec{v}(M) = v(x,y,z)\overrightarrow{e_x}$. Or l'écoulement est invariant selon l'axe (Oy) donc v est indépendante de y. De plus il est incompressible, donc $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, ce qui donne ici $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$. Il reste $\boxed{\vec{v}(M) = v(z)\overrightarrow{e_x}}$.

A3. $\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$ avec $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (écoulement stationnaire) et $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = v\dfrac{\partial v}{\partial x}\overrightarrow{e_x} = 0$. Il reste donc : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}P = \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}}$.

A4. Projections : $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x} = \rho g\sin\alpha + \eta\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}}$; $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0}$; $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g\cos\alpha}$.

A5. D'après la deuxième, P est indépendante de y. D'après la troisième : $P(x,z) = -\rho g\cos\alpha\, z + A(x)$. Condition aux limites : $P(x,h) = -\rho g\cos\alpha\, h + A(x) = P_{\mathrm{atm}}, \forall x$ donc $A = P_{\mathrm{atm}} + \rho g\cos\alpha\, h$ (indépendante de x), d'où $\boxed{P(z) = P_{\mathrm{atm}} + \rho g\cos\alpha\,(h-z)}$.

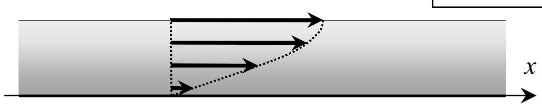
A6. La première projection devient : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} + k\sin\alpha = 0}$ avec $\boxed{k = \dfrac{\rho g}{\eta}}\left(= \dfrac{g}{\nu}\right)$.

A7. $\boxed{v(0) = 0}$ car la vitesse d'un fluide visqueux au contact d'une paroi solide est égale à celle de cette paroi, donc nulle ici.

De plus la contrainte tangentielle de viscosité $\eta\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ est nulle en h, soit $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(h) = 0}$.

A8. On intègre une première fois : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -k\sin\alpha\, z + B$, avec $-k\sin\alpha\, h + B = 0$, donc $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = k\sin\alpha\,(h-z)$. Puis $v(z) = k\sin\alpha\left(hz - \dfrac{z^2}{2}\right) + C$, avec $v(0) = C = 0$, donc $\boxed{v(z) = \beta z(2h-z)}$ avec $\boxed{\beta = \dfrac{k\sin\alpha}{2} = \dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}}$. v est maximale là où sa dérivée s'annule, donc à la surface libre ($z = h$) : $\boxed{v_{\max} = v(h) = \beta h^2 = \dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}h^2}$. AN $\boxed{v_{\max} = 1{,}1\ \mathrm{mm\cdot s^{-1}}}$.

A9.



D'après l'expression de $v(z)$, le profil de vitesse est parabolique, avec le maximum à la surface et le minimum nul sur le plan incliné.

A10. $Q_V = \iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_{y=0}^{W}\int_{z=0}^{h}\beta z(2h-z)\overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \beta W\left[hz^2 - \dfrac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{h}$ soit $\boxed{Q_V = \dfrac{2}{3}\beta W h^3 = \dfrac{\rho g\sin\alpha}{3\eta}W h^3}$. La moyenne sur la section est définie par $Q_V = \langle v\rangle S = \langle v\rangle W h$ donc $\langle v\rangle = \dfrac{2}{3}\beta h^2$ soit $\boxed{\langle v\rangle = \dfrac{2}{3}v_{\max}}$.

A11. Le nombre de Reynolds est le rapport entre les ordres de grandeur des flux convectifs (dans la direction de l'écoulement) et diffusifs (dans la direction orthogonale), donc par exemple entre le débit moyen d'énergie cinétique et la puissance moyenne des forces de viscosité. Si on considère par exemple un cube de fluide de côté h : $D_{E_c} \sim D_m\langle v\rangle^2 = \rho D_V\langle v\rangle^2 = \rho h^2\langle v\rangle^3$ et $\mathcal{P}_v \sim F_v\langle v\rangle \sim \eta\left|\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\right|h^3\langle v\rangle = \eta\dfrac{\langle v\rangle}{h^2}h^3\langle v\rangle = \eta h\langle v\rangle^2$ donc $\boxed{Re = \dfrac{\rho h\langle v\rangle}{\eta}}$. AN $\boxed{Re = 3\cdot 10^{-4} \ll 1}$: l'écoulement est bien laminaire.

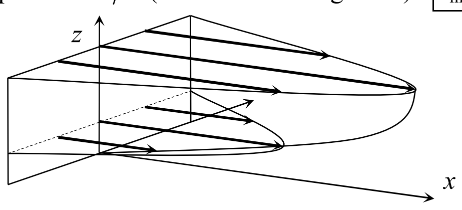
B1. Avec cette nouvelle forme de vitesse, on a toujours $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = 0$, mais cette fois $\Delta\vec{v} = \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{e_x}$. Les deux dernières projections de l'équation de Navier–Stokes donnent toujours le même champ de pression $P(z)$. La première projection donne donc l'équation différentielle : $\boxed{\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\rho g\sin\alpha}{\eta} = 0}$.

B2. On pose $y = a y'$ donc $\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}y'$, et de même $\mathrm{d}z = a\,\mathrm{d}z'$. Avec aussi $v = v_0 v'$, l'équation différentielle peut donc s'écrire : $\dfrac{v_0}{a^2}\dfrac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \dfrac{v_0}{a^2}\dfrac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + \dfrac{\rho g\sin\alpha}{\eta} = 0$. On obtient $\dfrac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \dfrac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0$ en posant $\boxed{v_0 = \dfrac{a^2\rho g\sin\alpha}{\eta}}\ (= a^2 k\sin\alpha)$.

B3. Comme précédemment, $\boxed{v'(y',0) = 0}$ (adhésion au fond par viscosité), et de même $\boxed{v'(\pm 1/2, z') = 0}$ (adhésion aux bords), et aussi $\boxed{\dfrac{\partial v'}{\partial z'}(y', 1/2) = 0}$ (absence de contrainte de cisaillement au contact de l'air).

B4. On lit pour $z' = 1/2$ (surface libre du glacier) : $\boxed{v'_{\max} = 0{,}0575}$.

B5.



La vitesse augmente du fond vers la surface (comme précédemment), et des bords vers le centre : on obtient des profils paraboliques dans les deux dimensions.

B6. La longueur de référence 800 m correspond à 6,9 cm sur la figure, et on mesure 8,4 cm pour le parcours de la balise centrale, donc on peut évaluer la longueur parcourue à $\boxed{D = 970\ \text{m}}$ en 9 ans, ce qui donne une vitesse moyenne $\boxed{v_\text{m} = 110\ \text{m}\cdot\text{an}^{-1} = 3{,}5\cdot10^{-6}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Avec les notations précédentes, cette vitesse correspond à $v_\text{max} = v'_\text{max} v_0$ donc $\boxed{v_0 = \dfrac{v_\text{m}}{v'_\text{max}}}$. AN $\boxed{v_0 = 6{,}1\cdot10^{-5}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

B7. $\boxed{\eta = \dfrac{a^2 \rho g \sin\alpha}{v_0}}$. AN $\boxed{\eta = 2{,}5\cdot10^{13}\ \text{Pa}\cdot\text{s}}$ en prenant $\rho = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, valeur proche de celle de l'eau liquide. Cette viscosité est très grande devant celle du miel, qui est déjà un fluide très visqueux. Par ailleurs cette modélisation de la glace comme un fluide newtonien semble correcte, puisque les courbes des balises ont sensiblement la forme de paraboles.