

Devoir test de physique n° 4

Cet énoncé comporte trois problèmes. Durée : quatre heures. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Problème 1

Des oiseaux hauts en couleur

L'extraordinaire diversité des motifs colorés des oiseaux résulte de phénomènes physiques tels que l'absorption de la lumière, la diffusion, les interférences ou encore la diffraction.

Certains motifs peuvent être expliqués soit par une répartition organisée du plumage, on parle alors de couleurs structurales, soit par la présence de pigments dans le plumage, on parle alors de couleurs pigmentaires. Si le jaune du canari est par exemple pigmentaire, le bleu de la perruche est lui structural.

Certains oiseaux bénéficient des deux types de colorations comme le perroquet Ara qui présente ainsi un plumage très coloré (**photo 1**).



Photo 1 - Perroquets Ara (rouge vert bleu à gauche, bleu jaune à droite)

Pour ce **problème 1**, les intervalles de longueurs d'onde de quelques couleurs sont fournis dans le tableau ci-dessous :

Couleurs	Rouge	Orange	Jaune	Vert	Bleu	Violet
λ en nm	620 - 780	590 - 620	580 - 590	500 - 580	450 - 500	380 - 450

On donne, pour une lentille conjuguant un objet A et une image A' , la relation de conjugaison avec origine aux foyers F et F' :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2.$$

I.1 - Le bleu de la perruche

À l'origine, la couleur des perruches à l'état sauvage est verte, mais la captivité chez cet oiseau, souvent élevé en nombre, a permis l'émergence de nouvelles couleurs, comme le bleu (**photo 2**). C'est notamment l'appauvrissement en pigments jaunes dans son plumage qui est indirectement responsable de cette coloration si particulière et rare dans le domaine animal.

De façon schématique, une plume est constituée essentiellement d'un rachis sur lequel pousse les barbes sur lesquelles naissent des barbules (**figure 1**). Le long des barbules prennent naissance à leur tour des crochets.



Photo 2 - Perruche bleue

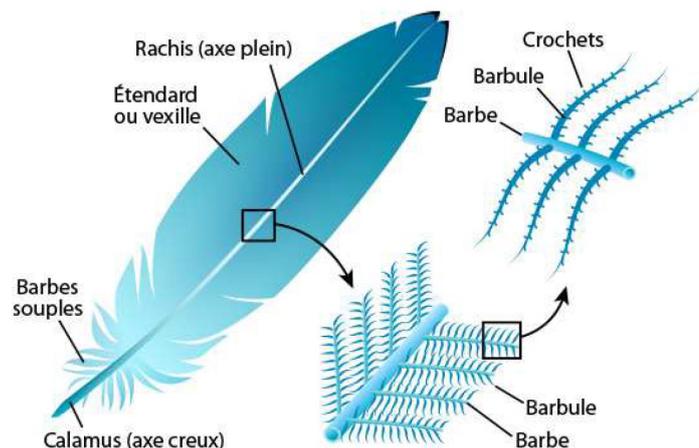


Figure 1 - Constitution d'une plume

Afin de déterminer l'origine physique de cette couleur bleue, on observe une partie AB d'une plume de perruche à l'aide d'un microscope optique.

Pour cela, on dispose :

- d'une première lentille, L_1 (centre O_1 , distance focale $f_1' = 1,2 \text{ cm}$), qui porte le nom d'objectif ;
- d'une deuxième lentille, L_2 (centre O_2 , distance focale $f_2' = 2,0 \text{ cm}$), qui porte le nom d'oculaire.

La distance qui sépare le foyer image F_1' de l'objectif et le foyer objet F_2 de l'oculaire est appelée intervalle optique, noté Δ , avec ici $\Delta = 16 \text{ cm}$ (**figure 2**).

L'observation se fait à l'aide d'un œil emmétrope (œil à vision normale) situé derrière l'oculaire.

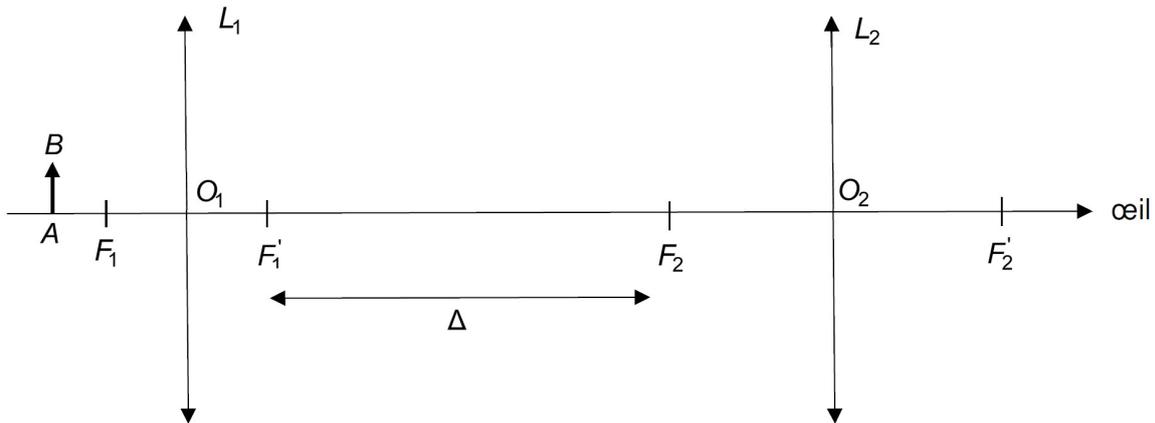


Figure 2 - Schéma du microscope

On se placera pour toute la suite dans les conditions de Gauss et dans l'approximation des petits angles. On note h la taille de l'objet AB observé.

- Q1.** Afin que l'observation puisse s'effectuer sans fatigue visuelle pour l'œil emmétrope, où doit être située l'image finale A_2 en sortie de L_2 ? Dans quel plan se situe donc l'image intermédiaire A_1B_1 ?
- Q2.** Reproduire sur la copie le schéma du microscope et tracer le chemin de deux rayons lumineux passant par l'extrémité B de l'objet, l'un parallèle à l'axe et l'autre passant par O_1 . Faire apparaître sur ce schéma :
- l'image intermédiaire A_1B_1 ;
 - le diamètre angulaire α' de l'image finale vue par l'œil.

- Q3.** Montrer que la grandeur $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{AB}$, appelée grandissement transversal de l'objectif, s'écrit :

$$\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'}$$

- Q4.** En déduire l'expression du diamètre angulaire α' de l'image vue par l'observateur au travers du microscope en fonction de f_1' , f_2' , h et de Δ .

En l'absence de dispositif, l'œil voit net un objet situé à une distance comprise entre d_m et d_M , avec $d_m < d_M$.

- Q5.** Quels noms donne-t-on aux points objets correspondant à ces distances ? Donner une valeur à d_m et d_M pour un œil emmétrope.

- Q6.** Déterminer le diamètre angulaire α de l'objet AB vu sans instrument et situé à une distance d_m de l'œil (**figure 3**).

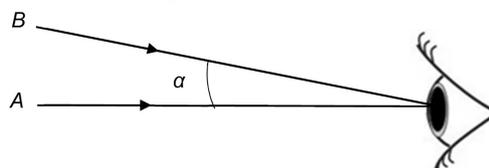


Figure 3 - Diamètre ou distance angulaire

Q7. En déduire que la grandeur $G_C = \frac{\alpha'}{\alpha}$, appelée grossissement commercial du microscope, s'écrit :

$$G_C = \frac{d_m \Delta}{f_1' f_2'}$$

Faire l'application numérique avec $d_m = 25 \text{ cm}$.

Q8. Un œil peut distinguer deux images ou deux objets si la distance angulaire les séparant est supérieure à la limite de résolution angulaire de l'œil $\varepsilon = 1'$ (une minute d'arc). Déterminer quelle sera la distance angulaire minimale α_m entre deux objets vus au travers de ce microscope.

L'image d'une partie d'une plume est donnée ci-après (**photo 3**) :

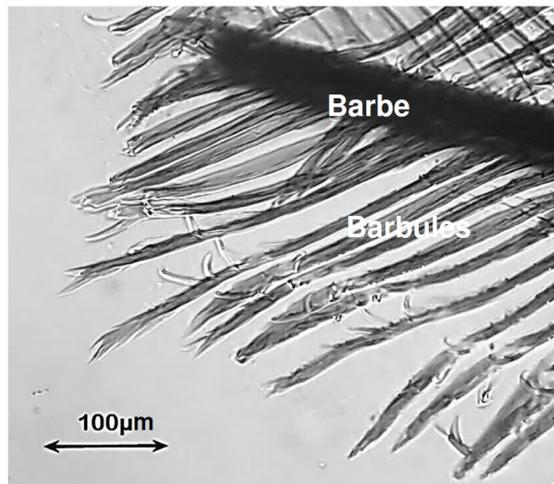


Photo 3 - Image d'une plume de perruche à l'aide d'un dispositif non précisé

Q9. Par mesure sur la **photo 3**, donner une estimation de la distance entre deux crochets situés au bout des barbules.

Q10. On rappelle que la résolution angulaire de l'œil nu est $\varepsilon = 1'$. Ces crochets peuvent-ils être distingués directement sans instruments ? Pourront-ils être distingués avec le microscope utilisé précédemment ?

En explorant davantage la plume, on découvre qu'à l'intérieur des barbes apparaissent des couches fines parallèles et empilées de petits grains appelés microgranules (**figure 4**).

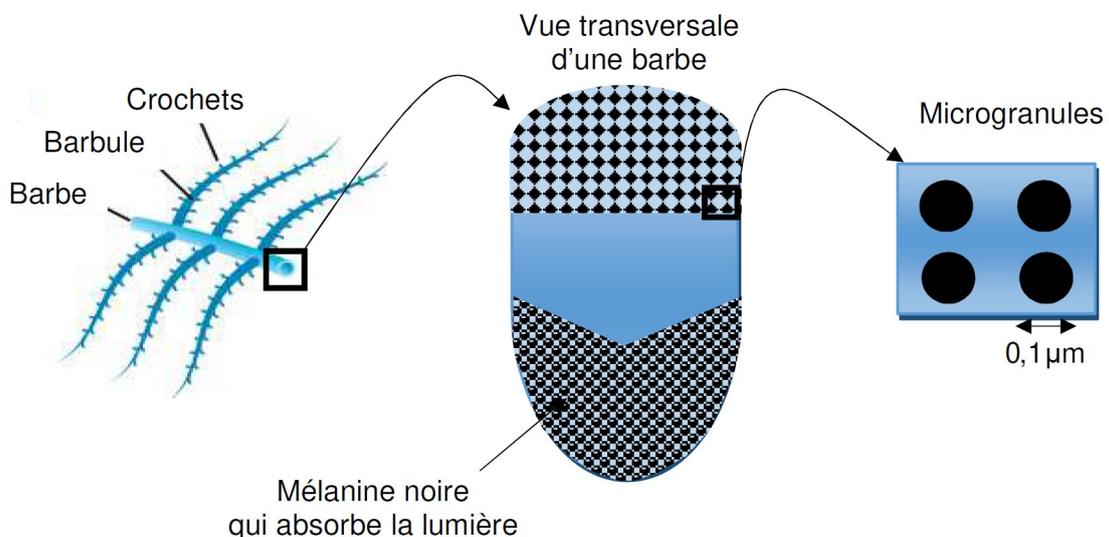


Figure 4 - Coupe transversale d'une barbe

Ces microgranules de petite taille sont responsables d'une diffusion de la lumière incidente (**figure 5**) :

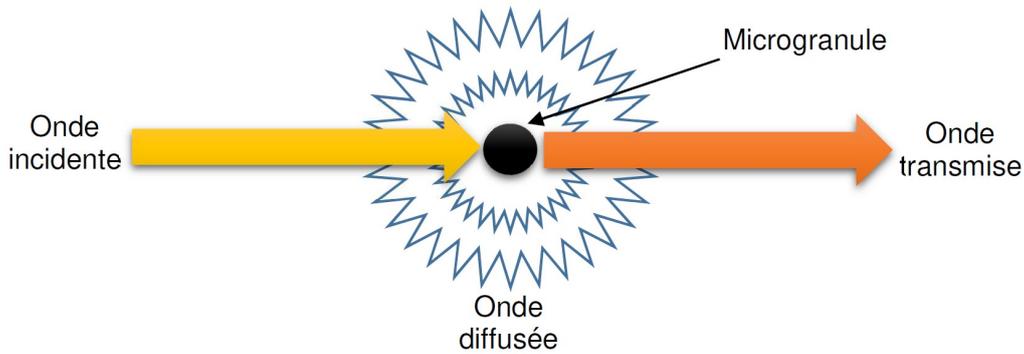


Figure 5 - Diffusion de la lumière par une microgranule

La puissance moyenne diffusée à travers une sphère, de centre une microgranule, est donnée par la formule :

$$\langle P \rangle = \alpha \omega^4$$

avec α une constante de proportionnalité et ω la pulsation du rayonnement incident.

Q11. Expliquer alors la couleur bleue prise par le plumage de la perruche lorsqu'elle est éclairée en lumière blanche. Que deviennent les radiations non diffusées ?

Q12. Par analogie avec un autre domaine de la physique, justifier que le premier étage de la barbe se comporte comme un filtre passe-bas en transmission.

I.2 - Du vert clair au violet pour le canard colvert

Dans certains cas, la couleur d'un plumage varie selon l'angle d'observation. C'est le cas du canard colvert mâle qui possède autour de son cou et de sa tête un plumage dont la teinte varie selon la direction (**photo 4**).

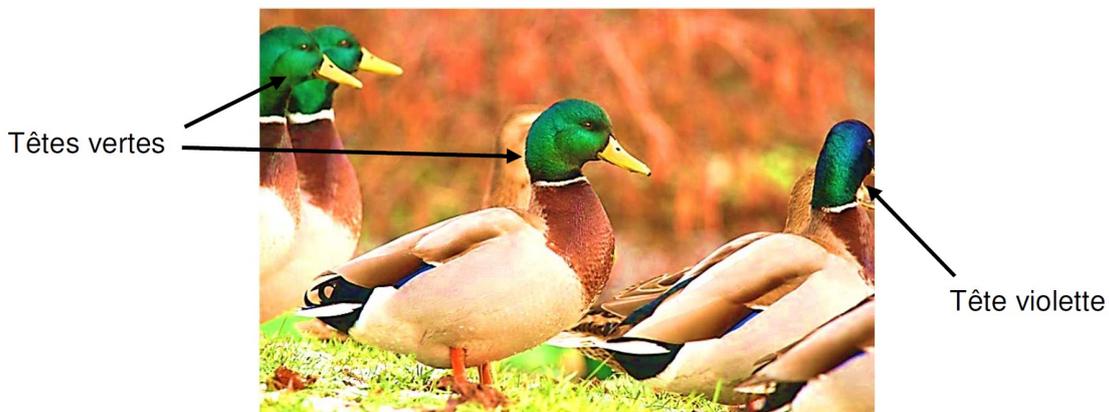


Photo 4 - Teinte variable sur les cous des canards colvert

Pour expliquer ce phénomène, il faut étudier l'intérieur des barbules, constituées notamment de petites cavités dans lesquelles on trouve de minces lamelles parallèles appelées microlamelles (**photo 5**).

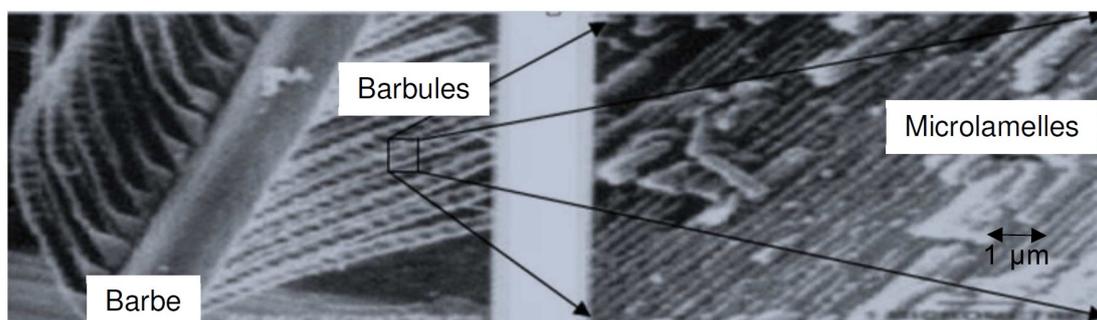


Photo 5 - Observation des microlamelles au microscope électronique

Chaque microlamelle se comporte comme un petit miroir réfléchissant la lumière. Entre deux lamelles se situe de la mélanine absorbant la lumière. Ainsi ces microlamelles s'apparentent aux traits d'un réseau plan qui peut être modélisé soit par la **figure 6a**, soit par la **figure 6b** :

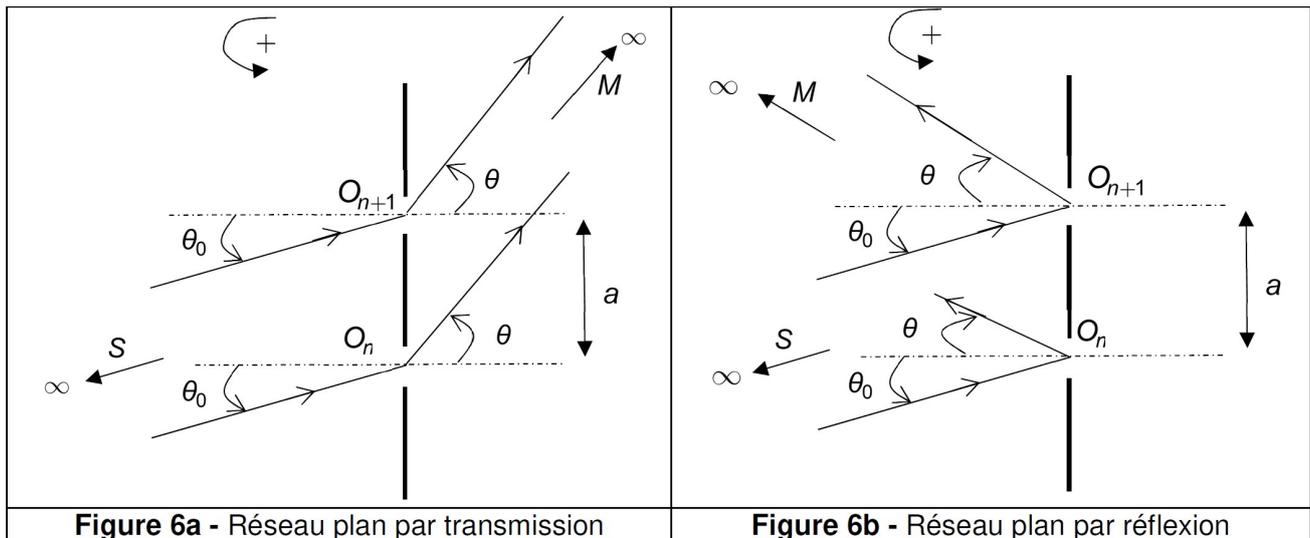


Figure 6a - Réseau plan par transmission **Figure 6b - Réseau plan par réflexion**

La distance entre deux lamelles est notée a . On donne $a = 0,56 \mu\text{m}$.

S représente une source de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , située à l'infini, envoyant un faisceau de rayons cohérents entre eux. L'observation se fait en un point M situé à l'infini.

- Q13.** La structure en microlamelles constitue-t-elle un réseau par réflexion ou par transmission ?
- Q14.** Déterminer, dans le cas du réseau plan par transmission, la différence de marche $\delta(M) = (SO_{n+1}M) - (SO_nM)$ entre deux rayons, l'un passant par O_n , l'autre par O_{n+1} .
- Q15.** Pour quelles valeurs de $\delta(M)$ les ondes interfèrent entre-elles de façon totalement constructive ?
- Q16.** Dans le cas des réseaux par réflexion, montrer par analogie que les maximums d'intensité lumineuse sont donnés pour des angles θ_k tels que :

$$\sin \theta_k + \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{a}$$

avec k un entier relatif.

- Q17.** Application : de quelle couleur apparaît la tête d'un canard colvert, dont les microlamelles sont éclairées en incidence normale par des rayons provenant du Soleil, d'une part pour l'observateur A et d'autre part pour l'observateur B supposés suffisamment éloignés (**figure 7**) ? On justifiera que l'on ne tient compte que des ordres $k = \pm 1$. Commenter en lien avec la **photo 4**.

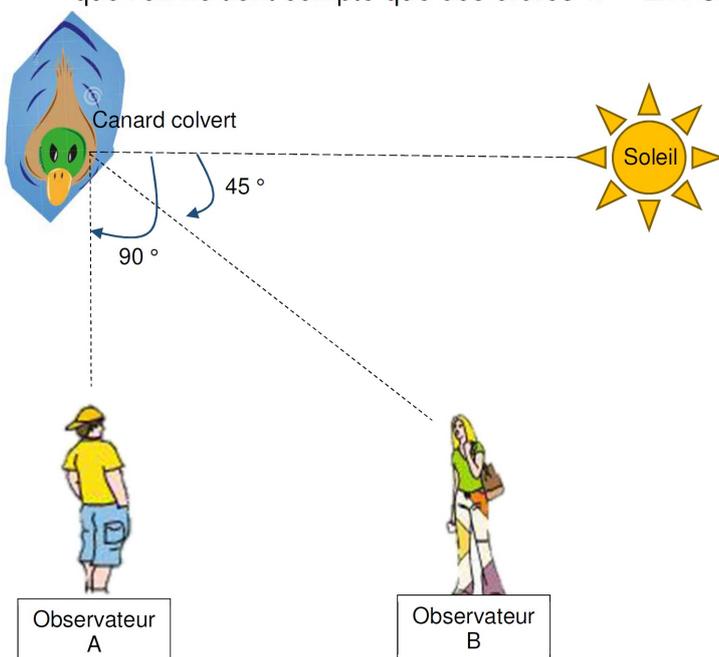


Figure 7 - Canard colvert éclairé par le soleil

Problème 2 Projet Virgo

Préambule

Tout comme l'accélération de charges permet le rayonnement d'une onde électromagnétique, l'accélération de masses entraîne l'émission d'ondes gravitationnelles (notées **OG** dans la suite) sous forme de trains d'onde, se propageant dans toutes les directions à la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les ondes gravitationnelles sont de petites perturbations de la géométrie locale de l'espace-temps. On les caractérise classiquement par une grandeur sans dimension h mesurant en quelque sorte le « pourcentage » de la déformation (on peut le considérer comme une variation anisotrope de l'indice de réfraction du vide). Si une onde gravitationnelle d'amplitude suffisante traverse un interféromètre, les chemins optiques suivis par chaque faisceau différent, provoquant un (faible) décalage de phase des faisceaux à la recombinaison. La mesure de ce déphasage permet de remonter à la différence de longueur des chemins dl puis à la grandeur $h = dl/L$ où L est la longueur de chacun des bras (soit 3 km dans le projet Virgo).

L'importance de telles ondes, prédite par la Relativité Générale, provient du fait qu'elle pourraient valider les prédictions d'Einstein et que tout phénomène physique peut en être la source, puisqu'il n'y a pas de matière qui soit neutre gravitationnellement. En particulier, les **OG** apparaissent dans l'Univers lors de processus « dramatiques » tels que les supernovæ ou la coalescence d'un système binaire d'étoiles à neutrons.

Le projet franco-italien Virgo consiste à détecter, par des méthodes d'interférométrie optique poussées à leurs limites extrêmes de sensibilité, ces **OG** dont les amplitudes sont très faibles et dont les fréquences vont de 10 à 10^4 Hz (ce qui correspond par exemple à l'exploration de l'amas de la Vierge, d'où l'expérience tire son nom).

L'objectif du projet Virgo est d'atteindre une sensibilité suffisante h , de l'ordre de 10^{-21} .

Notations :

- à une grandeur réelle $g(t) = G \cos(\omega t + \varphi)$ on associe la grandeur complexe $\underline{g} = \underline{G} e^{j\omega t}$,
- \underline{a} étant l'amplitude complexe lumineuse, l'éclairement est alors $E = \underline{a} \cdot \underline{a}^*$.

Quand l'**OG** arrive dans l'interféromètre, son action peut être modélisée de la façon suivante : l'**OG** provoque une variation d'indice de réfraction et donc une variation de différence de chemin optique. On cherche alors à détecter la variation de puissance lumineuse en sortie de l'interféromètre induite par ce passage.

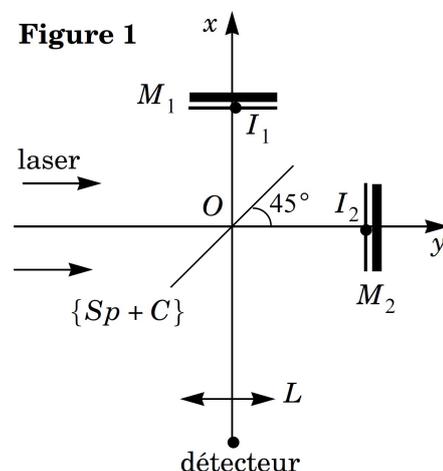
I.A - La figure 1 donne le schéma d'un interféromètre. Les miroirs M_1 et M_2 sont parfaitement orthogonaux entre eux et éclairés par une source laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1064 \text{ nm}$, de diamètre supposé constant (section S). La lame séparatrice est notée S_p .

I.A.1) À partir d'un schéma clair, expliquer en quelques lignes le rôle de la lame compensatrice, notée C , sa nature et son placement. Cette compensation est-elle parfaite ? Justifier la présence de la lentille mince L ; comment placer le détecteur ?

I.A.2) On admet que l'ensemble $\{S_p + C\}$ n'introduit aucune différence de marche supplémentaire.

Dans cette question il n'y a aucune **OG**.

a) On note $OI_1 = L_1$; $OI_2 = L_2 = L_1 + e$. L'indice de l'air sera pris égal à 1. Quelle est la différence de chemin optique δ_0 entre les rayons se réfléchissant sur M_1 et ceux se réfléchissant sur M_2 ?



b) En déduire, par une démonstration rapide, l'éclairement E_0 reçu par le détecteur en fonction de e , λ et l'éclairement E_{inc} du faisceau laser incident. On rappelle que chaque faisceau interférant a un éclairement égal à $E_{\text{inc}}/4$.

c) Qu'observerait-on si l'ensemble $\{L + \text{détecteur}\}$ était remplacé par un écran placé à grande distance de l'interféromètre ?

I.B - On suppose maintenant que l'interféromètre est soumis à une OG se propageant selon l'axe Oz , à la fréquence $\nu_{OG} = 1 \text{ kHz}$. Cela modifie alors la propagation des ondes lumineuses de la façon suivante :

- une onde lumineuse se propageant dans la direction Ox voit un indice égal à $n_x = 1 - (1/2)h(t, z)$;
- une onde lumineuse se propageant dans la direction Oy voit un indice égal à $n_y = 1 + (1/2)h(t, z)$;

où $h(t, z) = h_0 \cos(2\pi\nu_{OG}(t - z/c))$ caractérise le passage de OG (voir préambule). On supposera que cette grandeur a une amplitude constante sur l'ensemble de l'interféromètre ($z = 0$) ainsi que pendant sa propagation dans celui-ci : $h(t, z) = h_0 = 10^{-21}$.

I.B.1)

a) Calculer en présence de l' OG le chemin optique (OI_1) en fonction de h_0 et L_1 .

b) Même question pour le chemin optique (OI_2) en fonction de h_0 et L_2 .

c) En déduire la différence de chemin optique δ entre deux rayons interférant, en fonction de e , h_0 , L_1 et L_2 .

I.B.2) Montrer qu'en présence de l' OG l'éclairement en sortie de l'interféromètre s'écrit, au premier ordre en h_0 :

$$E \approx \frac{E_{\text{inc}}}{2} [1 + \cos\varphi_0 - 2h_0 kL \sin\varphi_0]$$

où φ_0 est le déphasage des rayons interférant en l'absence d' OG ; $k = 2\pi/\lambda$; $L = (L_1 + L_2)/2$.

I.B.3) On appelle P la puissance lumineuse. On admet que

$$P = \iint_{\text{Surface faisceau}} E dS \quad .$$

a) Déterminer la puissance lumineuse P_{mes} mesurée en sortie de l'interféromètre en fonction entre autre de la puissance P_{inc} du faisceau laser incident.

b) Pour quelle valeur de φ_0 la variation $|\Delta P_{\text{mes}}|$ de puissance mesurée lors du passage de l' OG est-elle maximale ? Donner alors l'expression de cette variation maximale.

Application numérique : pour $P_{\text{inc}} = 20 \text{ W}$ et $L_1 \approx L_2 = 3 \text{ km}$, calculer la valeur de cette variation maximale. Conclure.

I.B.4) En réalité, il faut optimiser la sensibilité de la méthode de détection. Une limitation fondamentale, en optique, est le bruit de comptage de photons (« shot noise »). On peut montrer que le rapport signal sur bruit, qu'il faut maximiser, s'écrit alors :

$$\frac{\text{signal}}{\text{bruit}} = K \frac{|\Delta P_{\text{mes}}|}{\sqrt{P_0}}$$

où P_0 est la puissance mesurée en l'absence d' OG et K une constante dimensionnée.

a) Déterminer la valeur la plus intéressante pour φ_0 . À quelle type de franges cela correspond-il ?

b) Expérimentalement on a $L_2 - L_1 = e = 847,9003 \text{ mm}$. Cela vous semble-t-il cohérent ? Justifier.

I.B.5) On admettra que la plus grande sensibilité de l'interféromètre est atteinte pour $\varphi_0 \approx \pi$; la plus petite valeur mesurable de h_0 est alors :

$$h_{\min} = \frac{1}{4\pi L \sqrt{P_{\text{inc}} T}} \sqrt{h_{\text{Planck}} c \lambda}$$

où T est la durée de mesure, et h_{Planck} la constante de Planck $h_{\text{Planck}} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Calculer h_{\min} pour $T = 10^{-4} \text{ s}$ (on remarquera que $e \ll L_1$).

I.B.6)

a) Le dispositif étudié ici permet-il de détecter les *OG* provoquées par les supernovæ de l'amas de la Vierge, situées à environ 10^7 années lumière ?

b) Sachant que l'amplitude d'une *OG* décroît, comme une onde électromagnétique, de manière inversement proportionnelle à la distance à la source, en déduire la distance à laquelle doit se produire une supernova pour qu'elle soit détectable par ce modèle de dispositif.

Quatre interféromètres de ce type existent dans le monde ; les projets les plus avancés sont LIGO (États-Unis) et TAMA (Japon).

Mise à jour (ce sujet datant de 2008) : des ondes gravitationnelles ont été détectées en septembre 2015 par le détecteur LIGO, et ces observations ont été confirmées ensuite. Le prix Nobel de physique 2017 a été attribué conjointement à Raïder Weiss, Barry C. Barish et Kip S. Thorne pour ces travaux. En août 2017, le détecteur Virgo a été remplacé par Advanced Virgo, plus sensible, qui a lui aussi détecté des ondes gravitationnelles.

Problème 3

Oscillateur quasi sinusoïdal

Cet oscillateur sera construit autour d'un filtre et d'un montage amplificateur. Ces deux blocs fonctionnels sont tout d'abord étudiés séparément.

C.II.1. Étude du filtre

Sur la Figure F9 on donne le schéma d'un filtre. On note $\underline{H}_F(\omega)$ sa fonction de transfert.

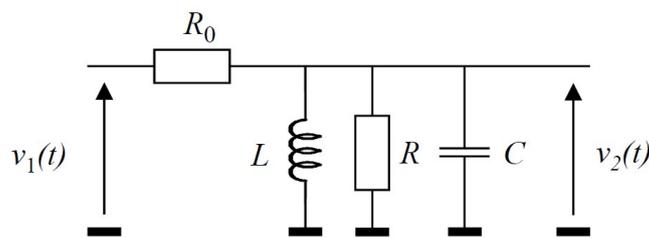


Figure F9. Schéma du filtre.

Q45. Déterminer l'expression de $\underline{H}_F(\omega)$ et la mettre sous la forme $\underline{H}_F = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left[x - \frac{1}{x} \right]}$ avec

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 \text{ étant la pulsation propre du filtre.}$$

Expliciter littéralement Q_F , H_0 et la fréquence caractéristique f_0 .

Q46. Donner l'expression reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à -3 dB.

On choisit $R_0 = 470 \Omega$, $R = 120 \Omega$, $L = 50 \mu\text{H}$ et $C = 50 \text{ nF}$ de sorte que : $H_0 \approx 0,2$, $f_0 \approx 100 \text{ kHz}$ et $Q_F \approx 3$.

Q47. Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel G_{dB} en fonction de $\log(x)$; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la "bande passante à -3 dB".

C.II.2 Étude de l'amplificateur

On considère deux structures possibles à placer en sortie du filtre pour amplifier le signal (Figures F10 et F11). Le circuit U1 est un amplificateur linéaire intégré supposé idéal.

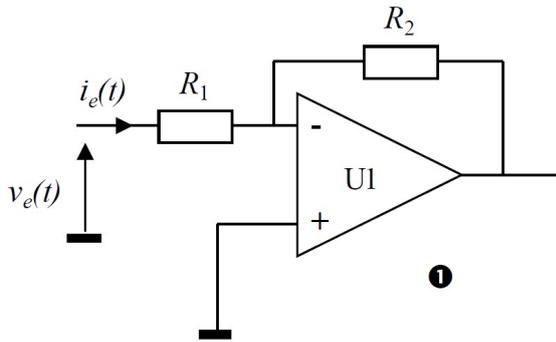


Figure F10. Structure amplificatrice n°1.

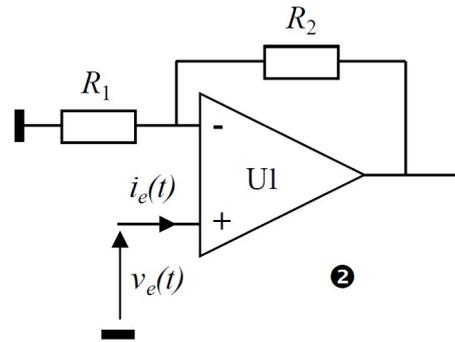


Figure F11. Structure amplificatrice n°2.

Q48. Déterminer, en précisant bien les hypothèses faites, les fonctions de transfert de ces deux structures, notées respectivement \underline{A}_1 et \underline{A}_2 .

Q49. Déterminer les impédances d'entrée Z_{e1} et Z_{e2} de chaque montage et expliquer pourquoi la structure n°2 est a priori un meilleur choix pour l'application envisagée.

Q50. En déduire alors l'expression de la fonction de transfert globale du montage associant les deux blocs fonctionnels filtre puis amplificateur en la mettant sous la forme $\underline{H}_{FA} = \frac{H_1}{1 + jQ \left[x - \frac{1}{x} \right]}$;

expliciter H_1 et Q .

C.II.3 Étude des oscillations

On associe maintenant les deux blocs en connectant la sortie du montage amplificateur à l'entrée du filtre, réalisant le système dont le schéma est donné Figure F12.

La sortie de l'amplificateur U1, toujours supposé dans un premier temps comme idéal, est connectée à l'entrée du filtre au travers d'un interrupteur K.

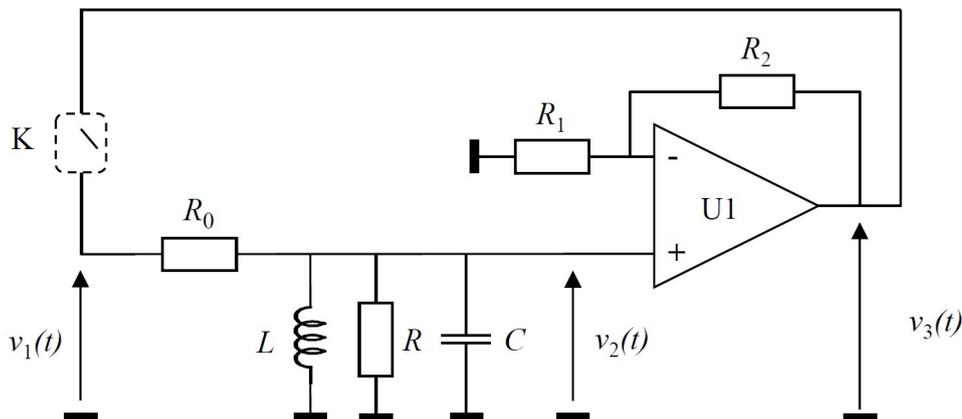


Figure F12. Structure bouclée associant le filtre et l'étage amplificateur.

À l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K, le condensateur C étant déchargé.

Q51. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension $v_3(t)$; on fera apparaître dans cette équation la pulsation propre, le facteur de qualité et le gain maximal.

On désire obtenir à la fermeture de l'interrupteur des oscillations pseudo-périodiques d'amplitude croissante.

Q52. À quelle condition sur H_1 cela sera-t-il possible ?

Q53. Que vaut la fréquence d'oscillation pendant la phase de démarrage ?

Q54. À quelles conditions la fréquence des oscillations peut-elle être considérée comme égale à la fréquence propre du filtre ?

Q55. En considérant d'une part l'étude précédente, et d'autre part le fait que le circuit U1 n'est pas idéal expliquer pourquoi il est préférable que le gain de l'étage amplificateur ne soit pas trop grand.

C.II.5 Stabilité de l'oscillateur

La stabilité d'un oscillateur est un critère fondamental de sa qualité, qu'il est indispensable de prendre en compte selon la précision nécessaire pour une application. On considère en général la stabilité à court-terme et la stabilité à long-terme.

C.II.5.1 Oscillateur quasi-sinusoidal

On considère (Figure F12) le schéma théorique de l'oscillateur, avec K fermé. On suppose qu'il fonctionne en régime permanent et pour simplifier on fait l'hypothèse que l'oscillateur est de type quasi-sinusoidal. Les signaux $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ sont alors considérés comme sinusoidaux, on peut donc raisonner dans l'espace des fréquences et noter les signaux \underline{V}_1 , \underline{V}_2 et \underline{V}_3 en représentation complexe.

Le filtre (entrée \underline{V}_1 , sortie \underline{V}_2) a pour fonction de transfert \underline{H}_F .

L'amplificateur (entrée \underline{V}_2 , sortie \underline{V}_3) a pour fonction de transfert \underline{A} .

Q63. Exprimer \underline{V}_2 en fonction de \underline{V}_1 , \underline{V}_3 en fonction de \underline{V}_2 et \underline{V}_1 en fonction de \underline{V}_3 . En déduire une relation entre \underline{A} et \underline{H}_F valable s'il y a effectivement oscillation. Cette relation est appelée condition d'oscillation.

Q64. Montrer que la condition d'oscillation conduit à la relation $\text{Arg}[\underline{H}_F(\omega)] = 0$.

C.II.5.2 Stabilité à court-terme

On suppose maintenant qu'en sortie de l'amplificateur il y a une petite fluctuation de phase, exprimée par le gain de l'amplificateur $\underline{A}' = A_0 e^{j\delta\psi}$ où A_0 est un réel positif.

Q65. Quelle est la nouvelle condition d'oscillation relative à la phase de $\underline{H}_F(\omega)$?

On considère que la fluctuation de phase $\delta\psi$ induit une fluctuation $\delta\omega$ de la pulsation d'oscillation, petite par rapport à la pulsation propre. On pourra donc écrire que $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ dans l'expression de \underline{H}_F sous forme canonique.

Q66. Déduire, à partir de la condition d'oscillation et de l'expression de \underline{H}_F simplifiée grâce à l'hypothèse précédente, l'expression de la variation $\delta\omega$ de la pulsation. Calculer alors la fluctuation de fréquence pour $\delta\psi = 1^\circ$.

Q67. Que se passe-t-il si la fluctuation $\delta\psi$ varie au cours du temps mais avec une amplitude faible ? Quel serait alors l'aspect du spectre du signal de l'oscillateur ?

Q68. Conclure sur la façon d'améliorer la qualité de l'oscillateur.