Ém2 – Corrigé des exercices 2 et 3

¤ Exercice 2

a) $\boxed{V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda(P)\,\mathrm{d}\ell}{PM}}$ et $\boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda(P)\,\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{PM}}{PM^3}}$. (Dans la suite on peut ajouter un cercle sur les intégrales, car on intégrera sur un cercle qui est une courbe fermée.)

b) Tout plan contenant l'axe (Oz) est un <u>plan de symétrie</u> qui contient M : $\vec{E}(M)$ est donc parallèle à tous ces plans, soit $\vec{E}(M)=E_z(M)\,\vec{e_z}$. De plus un point M de (Oz) n'a que la coordonnée z non nulle, donc $\boxed{\vec{E}(M)=E_z(z)\,\vec{e_z}}$.

Enfin le plan (Oxy), contenant toutes les charges, est un plan de symétrie : $\vec{E}(-z)$ est donc le symétrique de $\vec{E}(z)$, c'est-à-dire son opposé : $E_z(z)$ est une <u>fonction impaire</u>. (Ce dernier point n'est pas nécessaire pour faire le calcul intégral, mais il permettra de vérifier le résultat.)

c) $\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda(P)\,\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ avec $\lambda(P)=\lambda_0$, $\mathrm{d}\ell=R\,\mathrm{d}\theta$, $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}=-R\,\vec{e_r}+z\,\vec{e_z}$ donc $PM=\sqrt{R^2+z^2}$. Il est inutile d'intégrer le terme en $\vec{e_r}$: il donnera une somme nulle, puisqu'on sait que le champ résultant est selon $\vec{e_z}$.

$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda_0 R\,\mathrm{d}\theta\,z\,\vec{e_z}}{(R^2+z^2)^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 R\,z\,\vec{e_z}}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$ soit $\boxed{\vec{E}(M)=\frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{R\,z\,\vec{e_z}}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$. Il s'agit bien d'une fonction impaire.

d) $V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda_0 R\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$ soit $\boxed{V(M)=\frac{\lambda_0}{2\varepsilon_0}\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}}$. Cette fois on obtient une fonction paire, ce qui est bien compatible avec la symétrie (le symétrique d'un scalaire est lui-même, il n'y a pas d'orientation comme pour un vecteur).

Si on dérive V par rapport à z, on vérifie bien $\boxed{\vec{E}(M)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M)=-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_z}}$.

e) Cette fois le seul plan particulier passant par M est le plan d'équation $x=0$, c'est-à-dire (Oyz) : c'est un <u>plan d'antisymétrie</u>, donc $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan, soit $\vec{E}(M)=E_x(M)\,\vec{e_x}$. Et M a toujours uniquement la coordonnée z non nulle, donc $\boxed{\vec{E}(M)=E_x(z)\,\vec{e_x}}$. Enfin le plan ($Oxy$) est toujours un plan de symétrie : $\vec{E}(-z)$ est donc le symétrique de $\vec{E}(z)$, c'est-à-dire cette fois le même : on doit trouver pour $E_x(z)$ une <u>fonction paire</u>.

Dans l'intégrale, on a maintenant $\lambda(P)=+\lambda_0$ pour $x>0$, c'est-à-dire pour $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, et $\lambda(P)=-\lambda_0$ pour $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$. De plus $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}=-R\,\vec{e_r}+z\,\vec{e_z}=-R\cos\theta\vec{e_x}-R\sin\theta\vec{e_y}+z\,\vec{e_z}$ et on intégrera ici seulement le terme en $\vec{e_x}$ puisque les autres donnent un résultat nul.

$$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda_0 R\,\mathrm{d}\theta\left(-R\cos\theta\vec{e_x}\right)}{(R^2+z^2)^{3/2}}+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{-\lambda_0 R\,\mathrm{d}\theta\left(-R\cos\theta\vec{e_x}\right)}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 R^2\,\vec{e_x}}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)$$

soit $\boxed{\vec{E}(M)=-\frac{\lambda_0}{\pi\varepsilon_0}\frac{R^2\,\vec{e_x}}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$. Il s'agit bien d'une fonction paire.

f) $V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda_0 R\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}+\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{-\lambda_0 R\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\mathrm{d}\theta\right)$ soit $\boxed{V(M)=0}$.

En un point M de (Oz), puisque $\vec{E}(M)=E_x(M)\,\vec{e_x}$ alors $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M)=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x}$. Or on a fait les calculs uniquement sur l'axe (Oz), c'est-à-dire en un point $M(0,0,z)$, donc <u>on ne connaît pas la dépendance en *x* (ni en *y*) du potentiel</u> : on ne peut donc pas vérifier la valeur de la composante non nulle du champ.

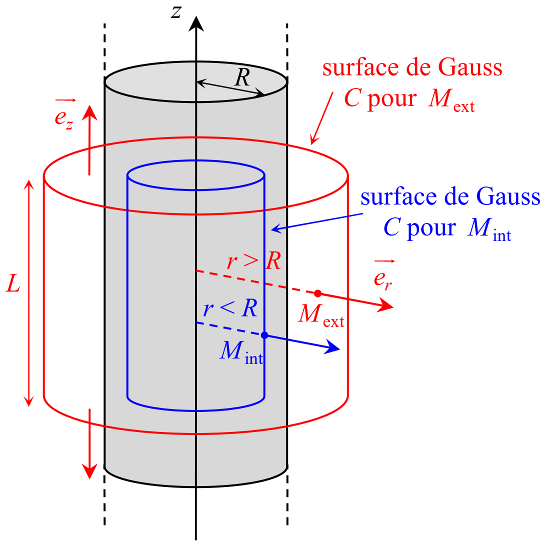
¤ Exercice 3

a) Il faut que <u>la longueur du cylindre soit très grande devant son rayon</u>, et que le point M étudié soit <u>proche du cylindre</u>, mais <u>éloigné des extrémités</u>.

b) On utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z). Pour un point M quelconque, le plan (MOz) est un plan de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ est parallèle à ce plan, c'est-à-dire que sa composante sur $\vec{e_\theta}$ est nulle. Le plan (Mxy) est aussi un plan de symétrie (pour un cylindre infini), donc la composante de $\vec{E}(M)$ sur $\vec{e_z}$ est nulle également : il reste $\vec{E}(M)=E_r\vec{e_r}$. De plus la distribution de charges est invariante par rotation autour de (Oz) donc E_r est indépendante de θ. Enfin elle est invariante par translation selon (Oz) donc E_r est indépendante de z. Finalement : $\boxed{\vec{E}(M)=E_r(r)\vec{e_r}}$.

c) On applique le théorème de Gauss à un cylindre fermé C d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur L (voir page suivante) : $\oiint_C \vec{E}(M)\cdot\mathrm{d}s\,\overrightarrow{n_{\text{sort}}}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$. Calcul du flux :

$$\oiint_C \vec{E}(M)\cdot\mathrm{d}s\,\vec{n_s}=\iint_{\text{base sup.}}E_r\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}s\,\vec{e_z}+\iint_{\text{base inf.}}E_r\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}s\left(-\vec{e_z}\right)+\iint_{\text{surf. latérale}}E_r(r)\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}s\,\vec{e_r}=0+0+E_r(r)\iint_{\text{surf. lat.}}\mathrm{d}s=E_r(r)2\pi rL\,.$$



Pour M extérieur ($r > R$) : $Q_{\text{int}} = \rho\pi R^2 L$ (les charges vont jusqu'à R, ensuite c'est vide), donc $E_r(r)2\pi r L = \dfrac{\rho\pi R^2 L}{\varepsilon_0}$ soit $\boxed{\vec{E}(M_{\text{ext}}) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e_r}}$.

Pour M intérieur ($r < R$) : $Q_{\text{int}} = \rho\pi r^2 L$ (les charges emplissent tout le cylindre de rayon r), donc $E_r(r)2\pi r L = \dfrac{\rho\pi r^2 L}{\varepsilon_0}$ soit $\boxed{\vec{E}(M_{\text{int}}) = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e_r}}$.

Les lignes de champ sont colinéaires à $\vec{e_r}$ en tout point : ce sont des <u>demi-droites orthogonales à (Oz)</u>.

d) $\mathrm{d}V = -\vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -E_r\vec{e_r}\cdot\left(\mathrm{d}r\,\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\,\vec{e_z}\right) = -E_r\,\mathrm{d}r$. Pour M intérieur : $\mathrm{d}V = -\dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r$ donc $V(M_{\text{int}}) = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2 + A$.

Avec l'origine $V(0) = 0 = A$, on obtient $\boxed{V(M_{\text{int}}) = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2}$. Pour M extérieur : $\mathrm{d}V = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$ donc $V(M_{\text{ext}}) = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln r + B$.

Par continuité du potentiel en R : $V(R) = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln R + B = -\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}R^2 \Leftrightarrow B = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(-\dfrac{1}{2} + \ln R\right)$, donc $\boxed{V(M_{\text{ext}}) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(-\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{R}{r}\right)}$.

Les surfaces équipotentielles sont définies par $V = \text{cte}$ soit $r = \text{cte}$: ce sont des <u>cylindres infinis d'axe (Oz)</u>.
