

Devoir d'entraînement de physique n° 5

Cet énoncé comporte deux extraits de problèmes.

Problème A

(Centrale-Supélec TSI 2022)

Prospection pétrolière par gravimétrie

Avant d'être acheminé par oléoduc, le pétrole doit être détecté dans le sous-sol puis extrait. La méthode de prospection dite « sismique réflexion » est couramment employée. Cette technique indirecte passe par l'analyse de la propagation d'ondes sismiques dans le sol, permettant de découvrir des pièges, c'est-à-dire des structures géologiques susceptibles de contenir des hydrocarbures, tels les anticlinaux.

On étudie dans cette partie une méthode de prospection complémentaire, qui consiste à détecter les variations du champ de pesanteur dues à la présence d'une nappe de pétrole dans le sous-sol. Cette technique est donc basée sur la gravimétrie.

III.A – Estimation de l'anomalie gravitationnelle due à la présence de pétrole

On cherche à estimer la variation Δg du champ gravitationnel, qu'on suppose ici confondu avec le champ de pesanteur, détectée par un avion qui survole la région prospectée.

Dans le premier cas (figure 10 gauche), l'avion survole une étendue supposée plane et homogène. Le champ gravitationnel vaut alors $-g\vec{u}_z$. Dans le second cas (figure 10 droite), l'avion survole une zone identique à ceci près qu'une nappe de pétrole, assimilée à une couche plane homogène d'épaisseur H , est présente dans le sous-sol. Le champ de pesanteur mesuré est alors $-(g - \Delta g)\vec{u}_z$. On note ρ_s la masse volumique du sol et ρ_p celle du pétrole.

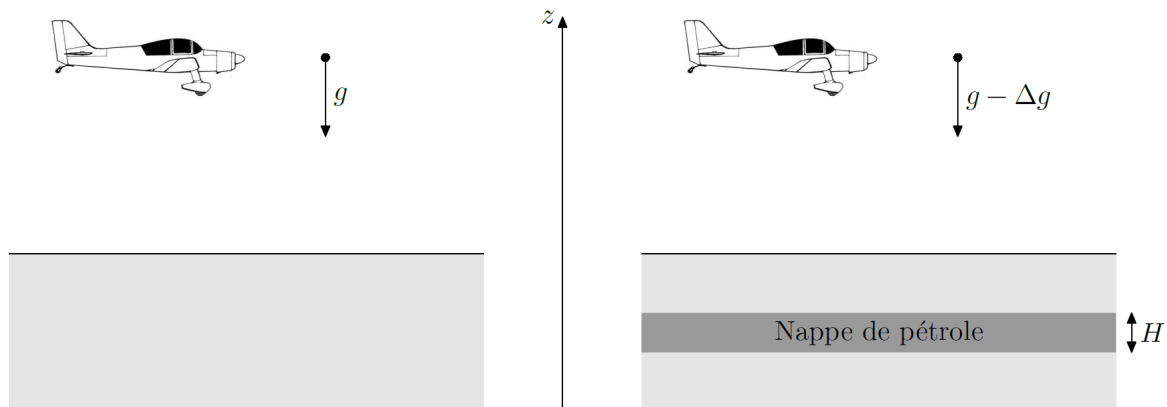


Figure 10 Détection d'une nappe de pétrole

Afin d'exprimer Δg , on s'intéresse tout d'abord au calcul du champ gravitationnel \vec{g}_c créé à l'extérieur d'une couche plane homogène d'épaisseur H et de masse volumique ρ_c , supposée seule dans l'espace (figure 11).

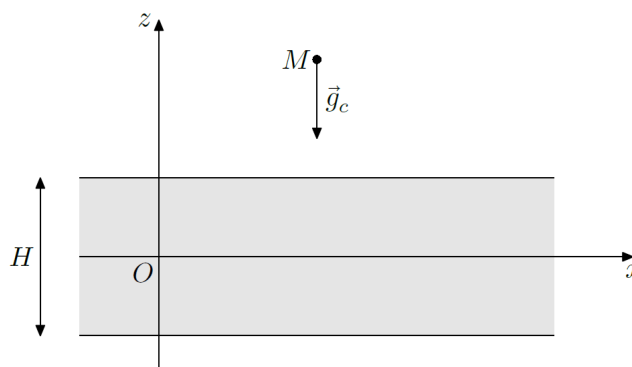


Figure 11 Champ gravitationnel créé par une couche plane

La couche plane est comprise entre les plans d'équations $z = -H/2$ et $z = +H/2$. Elle est supposée d'extension spatiale infinie selon les directions (Ox) et (Oy) (les effets de bord sont donc négligés).

Le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel g_c s'écrit

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g}_c \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_i$$

avec M_i la masse intérieure à la surface fermée Σ et G la constante gravitationnelle.

Q 32. Rappeler les expressions de la force d'interaction électrostatique \vec{F}_e subie par une charge ponctuelle q_A placée au point A de la part d'une charge ponctuelle q_B placée au point B ainsi que de la force d'attraction gravitationnelle \vec{F}_g subie par une masse ponctuelle m_A placée au point A de la part d'une masse ponctuelle m_B placée au point B .

Q 33. En déduire par des analogies à préciser comment on passe du théorème de Gauss pour le champ électrostatique au théorème de Gauss pour le champ gravitationnel.

Q 34. Justifier le fait que le champ gravitationnel a pour forme $\vec{g}_c = g_c(z)\vec{u}_z$.

Q 35. Établir, en illustrant votre démonstration par une figure avec une légende explicite, que $g_c = -2\pi G\rho_c H$ dans toute la partie située au-dessus de la couche plane.

Q 36. Exprimer l'anomalie gravitationnelle Δg en fonction de G , H , ρ_p et ρ_s . Calculer Δg .

Donnée : $H = 200$ m.

$$\rho_p = 800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \quad \rho_s = 2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$$

Problème B

(Centrale-Supélec TSI 2022)

Activité électrique du cœur

II.A.1) Dans un premier temps, on se propose d'étudier le champ électrique dû à la présence de charges ponctuelles avant de passer à la modélisation électrique du cœur.

Q 32. Soit une charge ponctuelle $q > 0$ placée en un point O fixe. Donner l'expression du vecteur champ électrostatique \vec{E} et du potentiel électrostatique V créé par q en un point M quelconque de l'espace situé à une distance r de O . On suppose que le potentiel électrostatique est nul à l'infini.

Q 33. Rappeler la définition d'une ligne de champ et d'une surface équipotentielle. Quelles sont-elles sur l'exemple précédent de la charge ponctuelle $q > 0$ située en O ? en faire une représentation dans un plan passant par O .

Q 34. On considère deux charges fixes positionnées sur un axe (Ox) : une charge $-q < 0$ au point A d'abscisse $x = -a$ et une charge $q > 0$ au point B d'abscisse $x = a$. Déterminer le vecteur champ électrostatique \vec{E} et le potentiel électrostatique V au point O , milieu de $[AB]$.

Un dipôle électrique est constitué de deux charges $-q$ située en A et $+q$ située en B ; on lui associe un moment dipolaire électrique $\vec{p} = q\vec{AB}$, de norme $p = qd$ avec $d = AB$. On repère un point M quelconque de l'espace par $\vec{r} = \vec{OM}$ avec O le milieu de $[AB]$ (figure 4). En coordonnées sphériques et à grande distance des deux charges, c'est-à-dire pour $r = OM \gg d$, on montre que le potentiel électrostatique V au point M s'écrit

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Ce potentiel électrostatique est associé à un champ électrostatique \vec{E} .

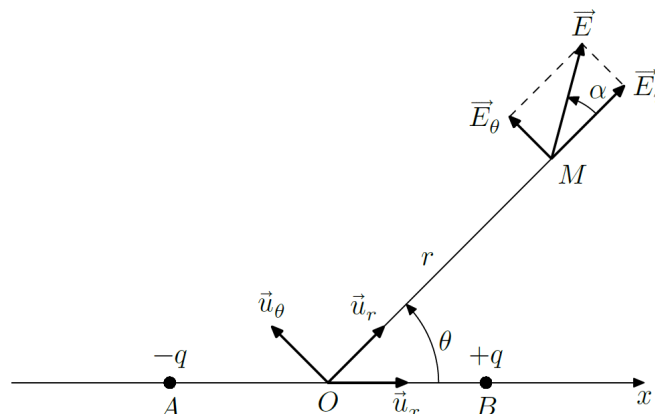


Figure 4 Dipôle électrique et coordonnées associées

Q 35. Déterminer les expressions des composantes E_r et E_θ du champ électrostatique \vec{E} à grande distance des deux charges ($r \gg d$).

Q 36. Quelle relation a-t-on entre l'angle θ et l'angle α que fait le champ \vec{E} avec l'axe (OM) ?

Q 37. Déterminer et dessiner le champ \vec{E} pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

II.A.2) L'enregistrement de l'activité cardiaque électrique au cours du temps est réalisée en mesurant une différence de potentiel entre deux points du corps. On appelle dérivation un système de deux électrodes exploratrices entre lesquelles on mesure une différence de potentiel. Dans l'étude des dérivations dites périphériques (ou des membres) les électrodes sont placées soit au poignet droit (point R) de potentiel V_R , soit au poignet gauche (point L) de potentiel V_L , soit à la jambe gauche (point F) de potentiel V_F . Par hypothèse, les points R , L et F sont aux sommets d'un triangle équilatéral (figure 5). On définit enfin une électrode de référence au potentiel V_W constant dont on précise les caractéristiques ci-après.

Une dérivation unipolaire correspond à une différence de potentiel entre une électrode exploratrice et l'électrode de référence alors qu'une dérivation bipolaire correspond à une différence de potentiel entre deux électrodes exploratrices.

Q 38. Combien peut-on construire de dérivation unipolaire ? de dérivation bipolaire ?

Q 39. Quel intérêt y a-t-il à associer ces deux types de dérivations ?

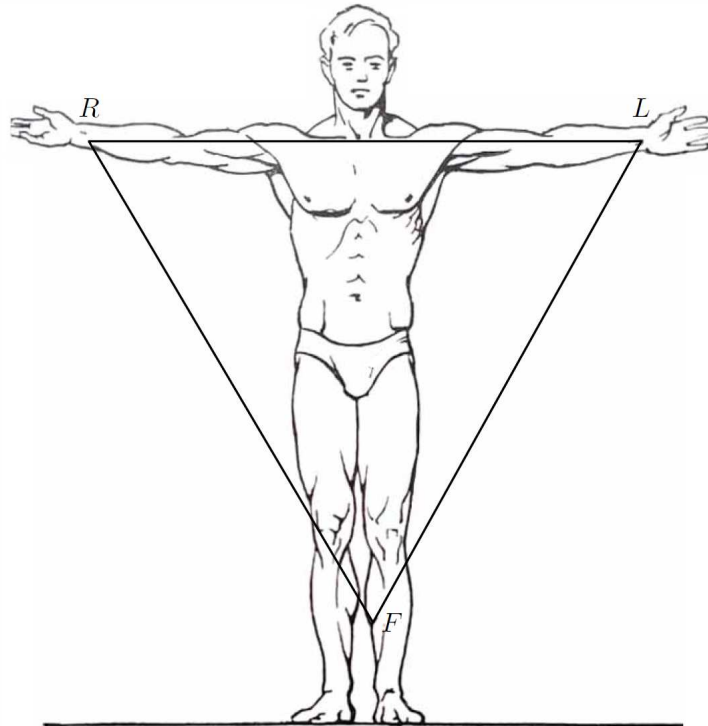


Figure 5 Dérivations périphériques

La théorie d'Einthoven permet d'expliquer les tracés observés dans les dérivations périphériques (enregistrement à grande distance du cœur).

- *Hypothèse 1* : à chaque moment du cycle cardiaque le cœur est assimilable à un dipôle électrique dont le vecteur moment dipolaire \vec{p} varie en module, direction et sens au cours du cycle cardiaque.
- *Hypothèse 2* : l'origine de \vec{p} peut être considérée comme fixe et correspond au centre électrique O du cœur.
- *Hypothèse 3* : le centre de gravité du triangle équilatéral formé par R , L et F est occupé par le centre électrique O du cœur.

Q 40. À l'aide de l'expression du potentiel créé par un dipôle donnée précédemment, exprimer les trois potentiels V_R , V_L et V_F en fonction, notamment, des distances $r_R = OR$, $r_L = OL$ et $r_F = OF$. On n'introduira pas de variables angulaires.

Q 41. Qu'imposent les hypothèses 2 et 3 pour le calcul précédent ?

Q 42. En déduire la possibilité de définir par le calcul une électrode de référence de potentiel V_W nul. On parle alors de borne centrale de Wilson. En pratique comment réaliser cette borne de Wilson ?