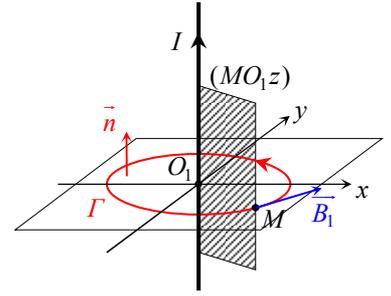


**Corrigé du devoir test de physique n° 5**

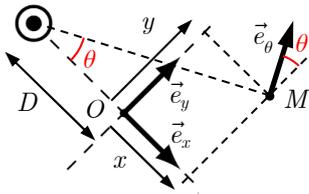
▣ **Problème 1** (Centrale-Supélec PC 2019)

**Q31.** Le plan contenant  $M$  quelconque et l'axe  $(O_1z)$  est un plan de symétrie pour le courant donc d'antisymétrie pour le champ, donc  $\vec{B}_1(M) \perp (MO_1z)$  soit  $\vec{B}_1(M) = B_\theta(M)\vec{e}_\theta$  en coordonnées cylindriques. De plus il y a invariance par rotation autour de  $(O_1z)$ , donc  $B_\theta$  est indépendante de  $\theta$ ; et invariance par translation selon  $(O_1z)$ , donc  $B_\theta$  est indépendante de  $z$ . Il reste donc finalement  $\vec{B}_1(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$ .

Théorème d'Ampère pour un cercle  $\Gamma$  centré sur  $(O_1z)$  et de rayon  $r$ , orienté dans le sens positif lié à l'axe :  $\oint_\Gamma \vec{B}_1(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$  avec  $I_{\text{enlacée}} = +I$  (dans le sens du vecteur



normal  $\vec{n}$ ) et  $\oint_\Gamma \vec{B}_1(M) \cdot d\vec{OM} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B_\theta(r)\vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = B_\theta(r)2\pi r$ , d'où  $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ .



**Q32.** Théorème de Pythagore :  $O_1M = \sqrt{(D+x)^2 + y^2}$ . Par ailleurs,  $\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y$  soit

$$\vec{e}_\theta = \frac{-y\vec{e}_x + (D+x)\vec{e}_y}{\sqrt{(D+x)^2 + y^2}}. \text{ L'expression du champ devient donc : } \vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-y\vec{e}_x + (D+x)\vec{e}_y}{(D+x)^2 + y^2}.$$

On factorise  $D$  en haut et en bas :  $\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \frac{-y'\vec{e}_x + (1+x')\vec{e}_y}{(1+x')^2 + y'^2}$ . À l'ordre 1 :

$$\vec{B}_1(M) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \frac{-y'\vec{e}_x + (1+x')\vec{e}_y}{1+2x'} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi D} (-y'\vec{e}_x + (1+x')\vec{e}_y)(1-2x') \text{ et finalement } \vec{B}_1(M) \approx \frac{B_1}{4} (-y'\vec{e}_x + (1-x')\vec{e}_y) \text{ avec } B_1 = \frac{2\mu_0 I}{\pi D}.$$

**Q33.** Le champ  $B_2$  s'obtient de même en remplaçant  $D$  par  $-D$ , donc en remplaçant  $B_1$ ,  $x'$  et  $y'$  par leurs opposés :

$$\vec{B}_1(M) \approx \frac{-B_1}{4} (+y'\vec{e}_x + (1+x')\vec{e}_y). \text{ Alors } \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \frac{B_1}{2} (-y'\vec{e}_x - x'\vec{e}_y).$$

**Q34.** La seconde paire de fils s'obtient par remplacement de  $I$  par  $-I$  et par rotation de  $90^\circ$ , ce qui revient à remplacer  $x'$  par  $y'$ ,  $y'$  par  $-x'$ ,  $\vec{e}_x$  par  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_y$  par  $-\vec{e}_x$ . Alors  $\vec{B}_3(M) + \vec{B}_4(M) = \frac{-B_1}{2} (+x'\vec{e}_y - y'(-\vec{e}_x))$ , qui est identique à  $\vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$ . Finalement, le

champ total est :  $\vec{B}(M) = B_1 (-y'\vec{e}_x - x'\vec{e}_y)$ .

**Q35.**  $\epsilon = -\nabla \cdot \vec{B}$  (analogue de  $\epsilon = -\vec{p} \cdot \vec{E}$  en électrostatique).

**Q36.** Le dipôle est dans une position d'équilibre stable si son énergie potentielle  $\epsilon$  est minimale, donc si  $\nabla \epsilon$  est colinéaire à  $\vec{B}$  et de même sens. Une fois le dipôle ainsi aligné, il minimise encore son énergie  $\epsilon = -\nabla \cdot \vec{B}$  en allant vers la zone de champ plus fort, il peut donc être piégé au voisinage d'un maximum de la norme du champ. Or ici le champ est minimal en  $O$ , donc le dipôle ne peut pas être piégé selon la physique classique.

**Q37.** On raisonne de même, mais cette fois, si  $g_F m_F < 0$  le minimum du champ est aussi un minimum de l'énergie potentielle, donc l'atome peut être piégé autour de  $O$ . Dans une énergie potentielle harmonique de la forme  $\frac{1}{2} kx^2 + \text{cte}$ , la pulsation des oscillations

d'une particule de masse  $m$  est  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Ici on peut écrire  $\epsilon_{mF} = -m_F g_F \mu_B B_0 + \frac{1}{2} k_r r^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$  avec  $k_r = -m_F g_F \mu_B \left( \frac{B_1^2}{B_0 D^2} - \frac{B''}{z_0^2} \right)$

et  $k_z = -2m_F g_F \mu_B \frac{B''}{z_0^2}$ , donc  $\omega_z = \sqrt{\frac{-2m_F g_F \mu_B B''}{z_0^2 m}}$  et  $\omega_r = \sqrt{\frac{-m_F g_F \mu_B \left( \frac{B_1^2}{B_0 D^2} - \frac{B''}{z_0^2} \right)}{m}}$ .

▣ **Problème 2** (Centrale-Supélec TSI 2019)

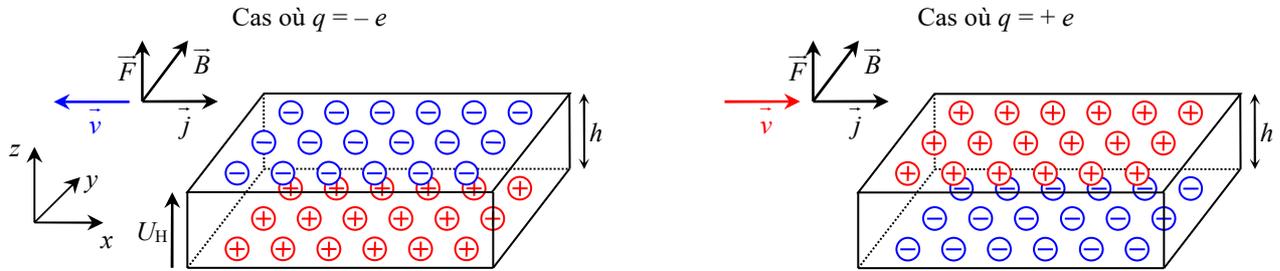
**Q53.** Par définition :  $\vec{j} = nq\vec{v}$ .

**Q54.**  $\vec{j}$  a la direction et le sens du courant : pour  $I > 0$ , le courant est orienté dans le sens des  $x$  croissants, donc  $\vec{j}$  également. Et puisque  $\vec{j} = -ne\vec{v}$ , le vecteur  $\vec{v}$  est orienté en sens contraire.

**Q55.**  $\vec{j}$  est toujours orienté dans le sens des  $x$  croissants, mais  $\vec{v}$  est cette fois dans le même sens puisque  $\vec{j} = +ne\vec{v}$ .

**Q56.** La force magnétique est :  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{n} \wedge \vec{B} = \frac{j}{n} \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_y = \frac{jB_0}{n} \vec{u}_z$ . Elle tend donc à dévier les porteurs de charges verticalement, vers la face supérieure, la face inférieure étant donc dépeuplée en porteurs de charges. Cette accumulation de charges crée l'équivalent d'un condensateur dont les armatures seraient ces deux faces : entre ces armatures apparaît donc une tension.

Q57.



Q58. Il suffit de déterminer le signe de la tension apparaissant entre les deux faces, la face chargée négativement ayant un potentiel plus faible : si  $q = -e$ ,  $U_H \leq 0$  ; si  $q = +e$ ,  $U_H > 0$ .

Q59. Le champ est orienté de l'armature positive vers l'armature négative, donc ici dans le sens des z croissants.

Q60. On applique le PFD à un porteur de charge mobile, en mouvement rectiligne uniforme :  $\vec{0} = -e\vec{v}_e \wedge \vec{B} - e\vec{E}_H - e\vec{E}_0 - m_e \vec{v}_e / \tau$ , les deux derniers termes, dirigés selon  $\vec{u}_x$ , étant la force électrique initiale (due au générateur) et la force d'interaction avec le milieu. En projection sur  $\vec{u}_z$ , il reste  $\vec{0} = -e\vec{v}_e \wedge \vec{B} - e\vec{E}_H$  d'où  $\vec{E}_H = -\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ .

Q61.  $E_H \vec{u}_z = +v_e \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_y = v_e B_0 \vec{u}_z$  soit  $E_H = v_e B_0$ . Avec  $I = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{hb} (-n_e e) (-v_e \vec{u}_x) \cdot \vec{u}_x \, ds = +n_e e v_e hb$  :  $E_H = \frac{I B_0}{n_e e h b}$ .

Q62.  $U_H = V(h) - V(0) = -\int_{z=0}^h \vec{E}_H \cdot d\vec{OM} = -\int_{z=0}^h \frac{I B_0}{n_e e h b} \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z$  soit  $U_H = -\frac{I B_0}{n_e e h b}$  ( $< 0$  comme prévu).

Q63. Cette fois  $\vec{E}_H$  est dans le sens des z décroissants : on notera  $\vec{E}_H = -E_H \vec{u}_z$ . Dans le PFD on remplace  $-e$  par  $+e$  dans chaque terme, ce qui donne le même résultat vectoriel :  $\vec{E}_H = -\vec{v}_p \wedge \vec{B}$  mais  $\vec{v}_p$  est dans l'autre sens. En projection :

$-E_H \vec{u}_z = -v_p \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_y = -v_p B_0 \vec{u}_z$  soit  $E_H = v_p B_0$ . Et avec  $I = n_p e v_p h b$  on obtient finalement  $E_H = \frac{I B_0}{n_p e h b}$  et  $U_H = +\frac{I B_0}{n_p e h b}$  ( $> 0$ ).

Q64. La densité volumique des électrons est celle des atomes de cuivre :  $n_e = n_{\text{Cu}} = \frac{\mu_{\text{Cu}} \varrho_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}}$ , donc  $U_H = -\frac{M_{\text{Cu}} I B_0}{\mu_{\text{Cu}} \varrho_{\text{Cu}} e h b} = -3,7 \cdot 10^{-9} \text{ V}$ .

Q65. Cette tension est beaucoup trop faible pour être mesurable avec un voltmètre ordinaire.

Q66. On trouve cette fois  $U_H = -4,5 \text{ mV}$ . Cette valeur est toujours faible, mais cette fois tout à fait mesurable.

### ▣ Problème 3 (E3A PC 2019)

A1. Initialement, un condensateur est déchargé. Lorsqu'il se charge, le courant arrivant sur une armature est identique à celui qui quitte l'autre : l'une des armatures se charge donc positivement et l'autre négativement, et il reste toujours globalement neutre.

A2. Il faut que la taille des armatures soit grande devant leur écartement, soit  $R_{\text{ext}} \gg e$ .

A3. Pour tout point  $M$ , le plan (Myz) est un plan de symétrie pour la distribution de charges, donc pour le champ électrostatique, ainsi  $\vec{E}_A(M)$  est parallèle à ce plan donc n'a pas de composante sur  $\vec{u}_x$ . De même, (Mxz) est aussi un plan de symétrie, donc  $\vec{E}_A(M)$  n'a pas de composante sur  $\vec{u}_y$ . On cherche donc a priori le champ sous la forme  $\vec{E}_A(M) = E_A(x, y, z) \vec{u}_z$ . Par ailleurs, la distribution supposée infinie est invariante par translation selon l'axe (Ox), donc la composante  $E_A$  est indépendante de la variable  $x$ . Et la distribution est invariante par translation selon l'axe (Oy), donc la composante  $E_A$  est indépendante de  $y$ . On a donc obtenu finalement :  $\vec{E}_A(M) = E_A(z) \vec{u}_z$ .

A4. Le plan  $A$  ( $z' = 0$ ) est un plan de symétrie, donc  $\vec{E}_A(-z')$  est symétrique de  $\vec{E}_A(z')$  soit  $E_A(-z') = -E_A(z')$  (fonction impaire).

A5. On applique le théorème de Gauss à un cylindre fermé  $\Sigma$  de génératrices parallèles à  $(Oz)$ , de bases d'aire  $S$  situées aux abscisses  $z' > 0$  et  $-z'$  :  $\oiint_{\Sigma} \vec{E}_A \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ . Flux :  $\oiint_{\Sigma} \vec{E}_A \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{base en } z'} E_A(z') \vec{u}_z \cdot ds \vec{u}_z + \iint_{\text{base en } -z'} E_A(-z') \vec{u}_z \cdot ds (-\vec{u}_z) + \iint_{\text{surf. lat.}} E_A \vec{u}_z \cdot ds \vec{n}_{\perp \vec{u}_z}$

$= \iint_{\text{base en } z'} E_A(z') ds + \iint_{\text{base en } -z'} (-E_A(-z')) ds + 0 = (E_A(z') - E_A(-z')) S = 2E_A(z') S$ . Charge intérieure :  $Q_{\text{int}} = \sigma S = \frac{Q_A}{\pi R_{\text{ext}}^2} S$ .

Donc  $2E_A(z') S = \frac{Q_A}{\epsilon_0 \pi R_{\text{ext}}^2} S$  d'où finalement :  $\vec{E}_A(M) = +\frac{Q_A \vec{e}_z}{2\epsilon_0 \pi R_{\text{ext}}^2}$  pour  $z' > 0$  soit  $z > \frac{e}{2}$  et  $\vec{E}_A(M) = -\frac{Q_A \vec{e}_z}{2\epsilon_0 \pi R_{\text{ext}}^2}$  pour  $z < \frac{e}{2}$ .

A6. On utilise le théorème de superposition, après avoir remplacé  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$  :  $\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$  avec  $\vec{E}_B(M) = +\frac{Q_B \vec{e}_z}{2\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} = -\frac{Q_A \vec{e}_z}{2\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$  pour  $z > \frac{e}{2}$  et  $\vec{E}_B(M) = -\frac{Q_B \vec{e}_z}{2\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2} = +\frac{Q_A \vec{e}_z}{2\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$  pour  $z < \frac{e}{2}$ . On obtient donc :

$\vec{E}(M) = \vec{0}$  pour  $z < -\frac{e}{2}$  et pour  $z > +\frac{e}{2}$  ;  $\vec{E}(M) = -\frac{Q_A \vec{e}_z}{\epsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$  pour  $-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$ .

A7. Le potentiel est défini par :  $d\varphi = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM}$ . Pour  $-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$  :  $d\varphi = \frac{Q_A \vec{e}_z}{\varepsilon \pi R_{\text{ext}}^2} \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z) = \frac{Q_A}{\varepsilon \pi R_{\text{ext}}^2} dz$  d'où

$\varphi(z) = \frac{Q_A}{\varepsilon \pi R_{\text{ext}}^2} z + \text{cte}$ . Avec  $\varphi(0) = 0$  la constante est nulle :  $\varphi(z) = \frac{Q_A}{\varepsilon \pi R_{\text{ext}}^2} z$  pour  $-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$ . Pour  $z < -\frac{e}{2}$  et pour  $z > +\frac{e}{2}$  :

$d\varphi = 0$  d'où  $\varphi(z) = \text{cte}$ . On obtient les constantes par continuité :  $\varphi(z) = -\frac{Q_A e}{2 \varepsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$  pour  $z < -\frac{e}{2}$  et  $\varphi(z) = +\frac{Q_A e}{2 \varepsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$  pour  $z > +\frac{e}{2}$ .

A8. La capacité est définie par :  $C = \frac{Q_A}{U}$  avec  $U = \varphi\left(+\frac{e}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{e}{2}\right) = +\frac{Q_A e}{\varepsilon \pi R_{\text{ext}}^2}$  donc  $C = \varepsilon \frac{\pi R_{\text{ext}}^2}{e}$ .

A9. Bilan d'énergie pour le condensateur :  $\frac{d\epsilon_C}{dt} = \mathcal{P}_{\text{reçue}} = UI = UC \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} CU^2 \right)$  donc  $\epsilon_C = \frac{1}{2} CU^2$  (à une constante près).

Ou bien : le stock d'énergie (réparti uniformément) est  $\epsilon_C = u_{\text{elec}} V = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \pi R_{\text{ext}}^2 e = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{U^2}{e^2} \pi R_{\text{ext}}^2 e$  soit  $\epsilon_C = \frac{1}{2} CU^2$ .

A10.  $u_{\text{elec,max}} = \frac{\epsilon_{C,\text{max}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{CU_{\text{max}}^2}{\pi R_{\text{ext}}^2 e} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon U_{\text{max}}^2}{e^2}$  soit  $u_{\text{elec,max}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{\text{max}}^2$ . AN  $u_{\text{elec,max}} = 43 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-3}$ .

A11.  $e = \frac{U_{\text{max}}}{E_{\text{max}}}$ . AN  $e = 5,0 \mu\text{m}$ .

A12.  $R_{\text{ext}} = \sqrt{\frac{eC}{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$ . AN  $e = 30 \text{ cm}$ . Ce serait un condensateur très encombrant ! Mais

on peut obtenir une surface équivalente avec un faible encombrement en enroulant les armatures et le diélectrique.

B1. Loi des mailles :  $u_C(t) + Ri(t) - E = 0$  avec  $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$  (en convention récepteur), d'où  $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C(t) = \frac{E}{\tau}$  avec  $\tau = RC$ .

B2.  $\tau$  est appelé temps de relaxation, ou encore constante de temps du circuit  $RC$ . Il donne l'ordre de grandeur du temps de charge ou de décharge du condensateur (régime transitoire).

B3. Solution générale :  $u_C(t) = E + A \exp(-t/\tau)$ . Avec la condition initiale  $u_C(0) = 0 = E + A$  on obtient  $u_C(t) = E [1 - \exp(-t/\tau)]$ .

Cette fonction tend asymptotiquement vers  $E$  : par identification avec le graphe on peut lire  $E = 5,1 \text{ V}$  (incertitude inférieure à  $0,1 \text{ V}$ ). Pour trouver  $\tau$  on peut tracer la tangente à l'origine et chercher son intersection avec l'asymptote ; ou bien chercher l'instant où  $u_C(\tau) = E [1 - 1/e] = 0,63E = 3,2 \text{ V}$  : on trouve dans les deux cas  $\tau = 1,1 \pm 0,1 \text{ ms}$ .

B4.  $C = \frac{\tau}{R} = 1,1 \pm 0,1 \mu\text{F}$ . (L'incertitude relative sur la lecture de  $\tau$  est beaucoup plus grande que celle sur la valeur de  $R$ .)

C1. L'électrolyte étant globalement neutre, les charges accumulées des deux côtés sont opposées :  $\rho_1 d_1 S = -\rho_2 d_2 S$  d'où  $\rho_1 d_1 = -\rho_2 d_2$ .

C2. Équation de Maxwell–Gauss pour ce milieu diélectrique :  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ . De plus  $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$ , d'où  $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$  (équation de

Poisson). Sachant que  $\varphi$  et  $\rho$  sont fonctions de  $z$  seulement, ceci s'écrit :  $\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{\rho(z)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 0$ .

C3. Pour  $-\frac{e}{2} + d < z < \frac{e}{2} - d$  :  $\rho(z) = 0$  donc  $\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0$ , d'où  $\varphi(z) = Az + B$ . Si on choisit  $\varphi(0) = 0$ , on obtient bien une forme

linéaire  $\varphi(z) = Az$ . Pour  $\frac{e}{2} - d < z < \frac{e}{2}$  :  $\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \text{cte}$  d'où  $\varphi(z) = -\frac{\rho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{z^2}{2} + Cz + D$ , qui est bien une fonction parabolique

avec la concavité vers le haut (premier coefficient positif). De même pour  $-\frac{e}{2} < z < -\frac{e}{2} + d$  :  $\varphi(z) = -\frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{z^2}{2} + Ez + F$ , fonction parabolique avec la concavité vers le bas (premier coefficient négatif).