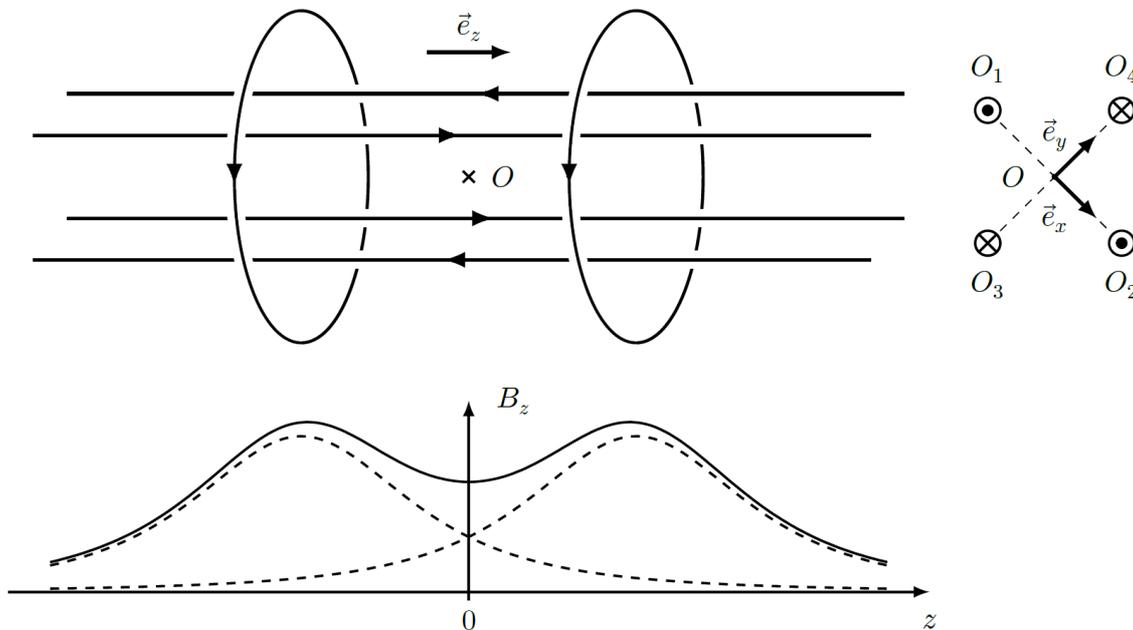


## Devoir test de physique n° 5

Cet énoncé comporte trois problèmes. Durée : 4 heures. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

### Problème 1 Piège magnétique

Le piège de type Ioffé-Pritchard, proposé dans les années 1960 par M. Ioffé pour le confinement des plasmas, a été repris dans les années 1980 dans le groupe de D. Pritchard pour confiner des atomes neutres. Sa version originale est constituée de quatre fils rectilignes et de deux bobines (figure 5).



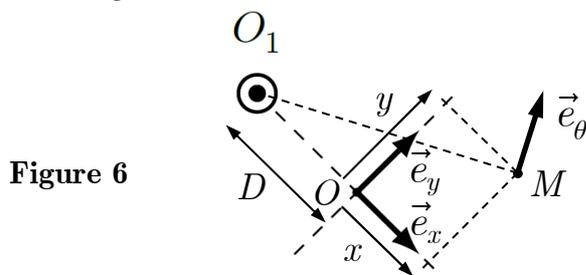
**Figure 5** Distribution de courant et champ sur l'axe ( $Oz$ ). En pointillé, le champ créé par chacune des deux spires et leur somme en trait pleins.

#### IV.A.1) Champ quadrupolaire créé par les quatre fils

**Q 31.** Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini d'axe ( $O_1z$ ) parcouru par un courant  $I$  (le courant  $I$  est positif suivant  $+\vec{e}_z$ ).

On détaillera bien les arguments de symétrie et d'invariance, et on précisera la méthode de calcul utilisée à l'aide d'un schéma.

**Q 32.** On se place dans le plan  $z = 0$ , on considère le fil pour lequel  $O_1$  a pour coordonnées  $x_1 = -D$  (avec  $D > 0$ ) et  $y_1 = 0$  (figure 6). On cherche l'expression cartésienne du champ  $\vec{B}_1$  créé par cet unique fil en un point  $M(x, y, 0)$  au voisinage de l'origine  $O$ .



**Figure 6**

Exprimer la distance  $O_1M$  en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $D$ , et montrer que le vecteur unitaire  $\vec{e}_\theta$  s'écrit  $\frac{-y\vec{e}_x + (D+x)\vec{e}_y}{\sqrt{(D+x)^2 + y^2}}$ . En déduire l'expression cartésienne de  $\vec{B}_1(M)$ .

Déterminer une expression approchée de ce champ  $\vec{B}_1$  au premier ordre en  $x' = x/D$  et  $y' = y/D$ , en fonction de  $x'$ ,  $y'$ ,  $B_1 = \frac{2\mu_0 I}{\pi D}$  et des vecteurs de base  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .

**Q 33.** On considère maintenant deux fils passant respectivement par les points  $O_1(-D, 0, 0)$  et  $O_2(+D, 0, 0)$ , tous deux traversés par des courants  $I$  positifs suivant  $+\vec{e}_z$ . Déterminer l'expression approchée du champ  $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$  au voisinage de l'origine.

**Q 34.** Par des considérations de symétrie (sans calculs), montrer que la seconde paire de fil dans la configuration proposée par Ioffé permet de doubler le champ précédent au voisinage du point  $O$ .

#### IV.A.2) Interaction dipôle-champ

Pour  $z$  assez petit, l'expression du champ créé par les deux bobines circulaires est  $\vec{B}(0, 0, z) = (B_0 + B''(z/z_0)^2)\vec{e}_z$ , avec  $B_0 > 0$  et  $B'' > 0$ . Si on prend en compte ce champ, on montre qu'au voisinage du point  $O$ , la norme du champ magnétique total peut s'écrire

$$B(x, y, z) = B_0 + \left( \frac{B_1^2}{B_0 D^2} - \frac{B''}{z_0^2} \right) \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{B''}{z_0^2} z^2.$$

On a de plus  $\frac{B_1^2}{B_0 D^2} > \frac{B''}{z_0^2}$ .

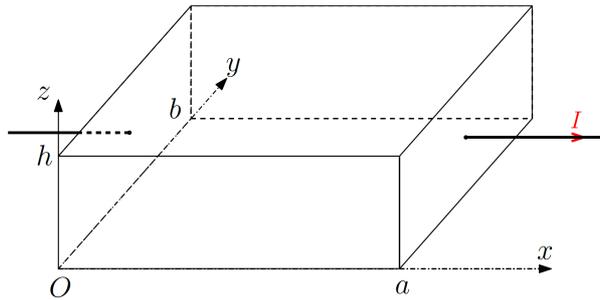
**Q 35.** Donner l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}$  d'un atome possédant un moment dipolaire magnétique  $\vec{M}$  plongé dans un champ  $\vec{B}$ . (Cette expression est analogue à celle de l'énergie d'un dipôle électrostatique.)

**Q 36.** Dans cette question, on utilise la physique classique. Un dipôle est placé en un point donné (il ne se déplace pas, mais il peut tourner sur lui-même) ; pour quelle orientation le dipôle se trouve-t-il dans une position d'équilibre stable vis à vis du champ ? On suppose maintenant que ce dipôle peut se déplacer dans l'espace et que, en tout point, il pointe dans la direction correspondant à l'orientation stable vis à vis du champ. Est-il possible de piéger le dipôle avec le champ magnétique dont la norme  $B(x, y, z)$  est donnée ci-dessus ?

**Q 37.** En physique quantique, l'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ est quantifiée vis à vis du moment magnétique (mais les énergies peuvent varier continument avec la norme du champ magnétique) : les valeurs possibles de l'énergie sont  $\mathcal{E}_{m_F} = -m_F g_F \mu_B B(x, y, z)$  où  $m_F$  est le nombre quantique magnétique qui est un entier (ou un demi-entier) positif ou négatif et où  $g_F$  est un facteur numérique (dit de Landé). Dans certaines conditions, même s'ils se déplacent dans un champ non uniforme, les atomes peuvent rester dans un sous-niveau Zeeman donné, c'est-à-dire que  $m_F$  reste toujours le même. Si le produit  $g_F m_F$  possède le bon signe, on peut donc avoir un potentiel harmonique *anisotrope* qui piège les atomes. Dans ces conditions, donner les expressions de la pulsation  $\omega_z$  des oscillations suivant la direction  $\vec{e}_z$  et de la pulsation  $\omega_r$  suivant les directions orthogonales à  $\vec{e}_z$ .

## Problème 2 Effet Hall

**A** – Soit une particule ponctuelle de charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  soumise à l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}(M)$ . On rappelle que l'expression de la force à laquelle cette particule est soumise s'écrit  $q \vec{v} \wedge \vec{B}(M)$ .



**Figure 13**

Soit une portion de conducteur de dimensions  $a, b, h$  (figure 13). Ce conducteur est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité  $I > 0$  (comme indiqué sur la figure 13).

On notera  $n$  la densité volumique de porteurs de charge et  $\vec{v}$  la vitesse d'un porteur de charge dans le volume. Les particules portent la charge  $q$  dont on ne connaît a priori pas le signe. On suppose dans un premier temps qu'il n'y a qu'un seul type de porteurs.

**Q 53.** Rappelez l'expression de  $\vec{j}$ , vecteur densité volumique de courant, en fonction de  $n, q$  et du vecteur vitesse d'un porteur de charge.

### *B – Approche qualitative de l'effet Hall*

**Q 54.** Si les porteurs de charges sont des électrons de charge  $q = -e$ , quel est le sens de  $\vec{j}$ ? Quel est le sens de  $\vec{v}$ ?

**Q 55.** Mêmes questions si les charges des porteurs sont positives  $q = +e$ .

On place le volume dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$  (où  $B_0 > 0$ ) supposé uniforme à l'échelle de l'échantillon.

**Q 56.** En considérant la direction et le sens de la force exercée par le champ magnétique sur un porteur de charge, expliquer en quelques mots pourquoi on voit apparaître une tension entre les faces d'équations  $z = 0$  et  $z = h$  du parallélépipède.

**Q 57.** Faire deux schémas indiquant le signe des charges apparaissant sur chaque face : dans le cas où  $q = -e$  et dans le cas où  $q = +e$ .

**Q 58.** Expliquer en pratique comment on peut simplement vérifier le signe des porteurs de charges avec un voltmètre.

### *C – Approche quantitative de l'effet Hall (cas des électrons porteurs)*

On se place dans le cas où les charges mobiles sont des électrons, donc  $q = -e$ . On notera  $n_e$  leur densité volumique et  $\vec{v}_e$  leur vitesse.

On suppose qu'après un régime transitoire au cours duquel des charges ont commencé à s'accumuler sur l'une des faces, on atteint un régime permanent où la quantité de charges accumulées sur les faces ne varie plus, donnant lieu à la création d'un champ électrique de Hall uniforme entre les faces noté  $\vec{E}_H$ .

Par ailleurs les porteurs de charges mobiles ont repris leur mouvement d'ensemble à la vitesse  $\vec{v}_e$  uniforme et constante suivant  $(Ox)$  l'intensité du courant électrique est toujours  $I$ .

**Q 59.** En utilisant la sous-partie B, expliquer quel est le sens de  $\vec{E}_H$ .

**Q 60.** Établir, en s'intéressant au mouvement d'un porteur de charge, la relation  $\vec{E}_H = -\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ .

**Q 61.** En projetant suivant  $(Oz)$  la relation précédente, donner l'expression de  $E_H$  en fonction de  $B_0$  et  $v_e$ ; puis en fonction de  $B_0, e, n_e, I$  et des dimensions du conducteur.

**Q 62.** Exprimer  $U_H = V(z = h) - V(z = 0)$ , la tension de Hall.

### D – Cas de porteurs positifs

Dans le cas de semi-conducteurs *dopés N*, les porteurs majoritaires sont des *électrons* de charge  $-e$ . Mais dans le cas de semi-conducteurs *dopés P*, les porteurs majoritaires sont des *trous* de charge  $+e$  et de densité volumique notée  $n_p$ . On notera leur vitesse  $\vec{v}_p$ .

**Q 63.** Reprendre les calculs précédents pour établir la nouvelle expression de  $U_H$  dans le cas d'un semi-conducteur dopé P en justifiant *soigneusement* (à l'aide d'un schéma notamment) les calculs.

### E – Applications numériques

**Q 64.** Dans le cas d'un conducteur comme le cuivre, les seuls porteurs sont des électrons. On suppose que dans le cristal chaque atome de cuivre libère un électron de conduction. En utilisant les données du tableau 2, calculer la tension de Hall  $U_H$ .

Masse molaire atomique du cuivre	$M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse volumique du cuivre	$\mu_{\text{Cu}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Champ magnétique	$B_0 = 0,1 \text{ T}$
Dimensions du conducteur	$h = 5,5 \text{ mm}, a = b = 0,2 \text{ mm}$
Intensité du courant	$I = 0,1 \text{ A}$

**Tableau 2** Données numériques

**Q 65.** Commenter la valeur obtenue.

**Q 66.** Reprendre le calcul pour un semi-conducteur, comme le germanium, dopé *N* de sorte que  $n_e = 7 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ . Conclure.

## Problème 3

### Condensateur et supercondensateur

*Voir formules et valeurs en fin d'énoncé*

#### A / Condensateur plan à symétrie de révolution

On considère le condensateur plan de la figure suivante.

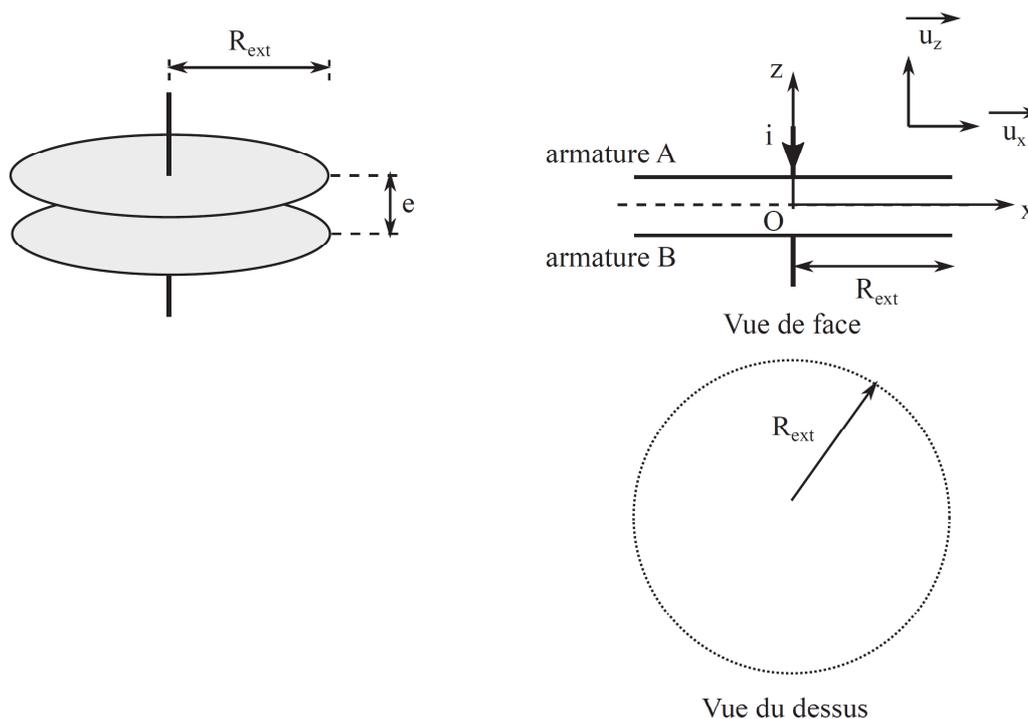


FIGURE 1 – Condensateur plan à symétrie de révolution

Ses armatures sont des disques conducteurs de rayon  $R_{\text{ext}}$  séparés par un diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  et d'épaisseur  $e$ . **D'un point de vue électrique, le diélectrique se comporte comme le vide à condition de remplacer la permittivité du vide  $\epsilon_0$  par la permittivité du milieu  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  dans les formules utilisées.**

Les armatures A et B sont soumises respectivement à un potentiel électrique  $\mathcal{V}_A$  et  $\mathcal{V}_B$ . On note  $Q_A$  la charge électrique de l'armature A et  $Q_B = -Q_A$  celle de l'armature B.

On suppose que le champ électrique  $\overrightarrow{E}(M)$  est orienté selon l'axe  $\overrightarrow{u}_z$  et qu'il est uniforme à l'intérieur du diélectrique.

Les armatures étant d'épaisseur négligeable, elles seront donc considérées confondues avec les plans d'équation  $z = -\frac{e}{2}$  et  $z = +\frac{e}{2}$ . On adoptera un modèle de plan uniformément chargé en surface pour les décrire.

**A1.** Justifier très simplement que les armatures d'un condensateur ont des charges électriques de signes opposés.

**A2.** Donner une condition sur  $R_{\text{ext}}$  et  $e$  permettant d'assimiler les armatures à deux plans infinis.

On s'intéresse dans un premier temps uniquement à l'armature supérieure, supposée seule et dans le vide.

**A3.** Justifier avec soin que le champ électrique créé en tout point par cette armature peut s'écrire  $\overrightarrow{E}_A(M) = E_A(z) \overrightarrow{u}_z$ .

**A4.** On pose  $z' = z - \frac{e}{2}$ . Exprimer  $E_A(-z')$  en fonction de  $E_A(z')$ . On justifiera la réponse.

**A5.** En utilisant le théorème de Gauss, établir alors l'expression du champ électrique créé en tout point de l'espace par l'armature en fonction de  $Q_A$ ,  $R_{\text{ext}}$  et  $\epsilon_0$ .

On prendra le soin de distinguer les cas  $z > \frac{e}{2}$  et  $z < \frac{e}{2}$ .

On considère maintenant l'ensemble des deux armatures séparées par le diélectrique de permittivité  $\epsilon$ .

**A6.** Donner l'expression du champ électrique créé en tout point de l'espace par cette distribution. On distinguera trois zones de l'espace.

**A7.** Donner l'expression du potentiel électrostatique  $\mathcal{V}(z)$  à l'intérieur du diélectrique en fonction de  $R_{\text{ext}}$ ,  $Q_A$  et  $z$ . On prendra comme référence des potentiels électriques  $\mathcal{V}(z=0) = 0$ .

**A8.** Montrer alors que la capacité  $C$  de ce condensateur est donnée par la formule :

$$C = \epsilon \frac{\pi \cdot R_{\text{ext}}^2}{e}$$

On suppose le condensateur initialement déchargé et que l'on soumet à une différence de potentiel  $U = \mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B$ .

**A9.** Démontrer que l'énergie électrique stockée dans le condensateur a pour expression :  $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C \cdot U^2$

On souhaite réaliser un condensateur avec un diélectrique composé de polypropylène de permittivité relative  $\epsilon_r = 2$ . Afin d'éviter un claquage (destruction du diélectrique suite à l'application d'un champ électrique trop important), on se restreint à un champ électrique  $E_{\text{max}} = 70 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**A10.** Quelle est la densité volumique maximale d'énergie électrique que l'on peut stocker ? On supposera le volume des armatures négligeable.

**A11.** Quelle doit être l'épaisseur  $e$  du diélectrique pour une différence de potentiel  $U_{\text{max}} = 350 \text{ V}$  ?

**A12.** Quel doit être le rayon  $R_{\text{ext}}$  du condensateur pour une capacité  $C = 1,0 \mu\text{F}$  ? Commenter brièvement le résultat obtenu.

## B / Mesure de la capacité d'un condensateur

On souhaite dans cette partie mesurer expérimentalement la capacité  $C$  d'un condensateur. Une méthode consiste à soumettre le dipôle { condensateur de capacité  $C$  + conducteur ohmique de résistance  $R$  } série à un échelon de tension et d'analyser la réponse temporelle de ce dipôle à cette excitation. Le condensateur est initialement déchargé et le conducteur ohmique a pour résistance  $R = 1,00 \pm 0,01 \text{ k}\Omega$ .

À l'instant de date  $t = 0$ , le dipôle ( $RC$ ) est soumis à une tension constante  $E$ . Un système d'acquisition permet d'enregistrer tous les  $\Delta t = 0,10 \text{ ms}$  la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur.

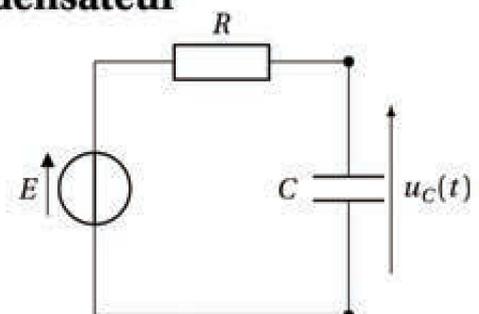


FIGURE 2 – Circuit d'étude

On obtient le graphe  $u_{C,exp} = f(t)$  suivant. La courbe de réponse obtenue permet raisonnablement de suggérer un comportement du premier ordre.

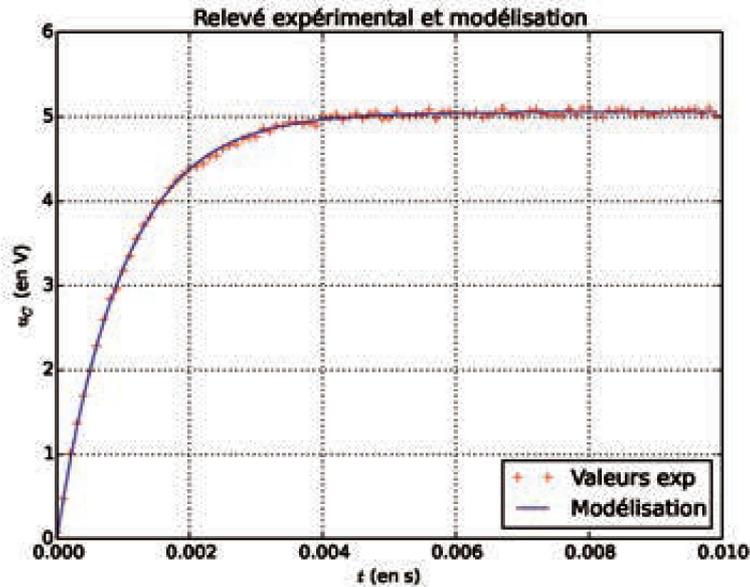


FIGURE 3 – Relevé expérimental et modélisation

**B1.** Établir l'équation différentielle satisfaite par  $u_C$  et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}$$

**B2.** Comment nomme-t-on  $\tau$  ? Quelle est sa signification physique ?

**B3.** (\*) Déterminer à l'aide du relevé expérimental fourni une estimation de  $\tau$  et de  $E$ . Bien expliciter le raisonnement suivi.

**B4.** En déduire alors une estimation de la capacité  $C$  du condensateur.

## C / Matrice de supercondensateurs

### Document 1 : Présentation des supercondensateurs

L'utilisation d'un système de stockage d'énergie est souvent nécessaire pour les applications de type traction électrique. Le composant de stockage est utilisé :

- dans les systèmes isolés où il alimente des dispositifs demandant une énergie réduite ;
- dans les systèmes hybrides où il joue un rôle en terme d'apport de puissance ou d'énergie selon l'application (par exemple : phases de freinage ou d'accélération) ;

Jusqu'à présent, les systèmes les plus utilisés sont les accumulateurs qui ont une puissance spécifique et une autonomie relativement élevées. Les condensateurs classiques ont une autonomie insuffisante,



FIGURE 4 – Un supercondensateur de capacité  $C = 3,0 \cdot 10^3$  F commercialisé par le fabricant Maxwell

mais possèdent une puissance spécifique incomparable. Les supercondensateurs apparaissent comme des composants intermédiaires en terme de propriétés énergétiques qui les rendent très intéressants car ils n'ont pratiquement pas de concurrents dans ce domaine.

Si on veut accroître la capacité de stockage d'un condensateur, il faut augmenter la permittivité relative  $\epsilon_r$  du diélectrique et/ou le rapport  $\frac{S}{e}$  ( $S$  désignant la surface des armatures et  $e$  la distance séparant les deux armatures.)

Le principe de base des supercondensateurs est liée à la valeur élevée du rapport  $\frac{S}{e}$ . Ainsi, les charges électriques se trouvent localisées sur des surfaces très importantes (électrodes poreuses) et à des distances très faibles (principe de la double couche électrochimique) où apparaissent les ions de l'électrolyte et les charges opposées de l'électrode.

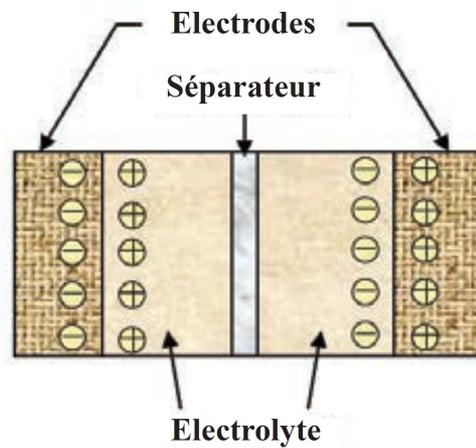


FIGURE 5 – Double couche électrochimique au sein d'un supercondensateur

On s'intéresse ici à une modélisation rudimentaire d'un supercondensateur. Dans un premier temps sera étudié le profil du potentiel électrique  $\mathcal{V}(z)$  à l'intérieur du diélectrique. ~~Nous proposerons ensuite un « modèle électrocinétique » d'un supercondensateur. Enfin, une étude expérimentale permettra la détermination des paramètres du « modèle électrocinétique ».~~

Considérons alors le profil de densité volumique de charge  $\rho(z)$  à l'intérieur du diélectrique suivante :

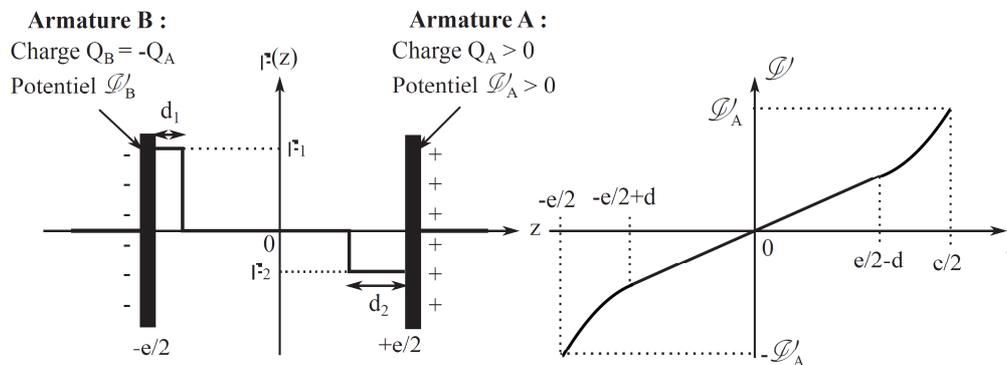


FIGURE 6 – Distribution de charge à l'intérieur du diélectrique. Les charges à l'intérieur du diélectrique sont localisées sur les épaisseurs  $d_1$  et  $d_2$ . Graphe de la fonction  $\mathcal{V} = f(z)$ .

**C1.** Donner une relation entre  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $d_1$  et  $d_2$  en la justifiant.

**C2.** Montrer que le potentiel électrique à l'intérieur du supercondensateur satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 \mathcal{V}}{dz^2}(z) + \frac{\rho(z)}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} = 0$$

**C3.** Justifier la forme linéaire ou parabolique des différentes parties du graphe du potentiel  $\mathcal{V} = f(z)$ . Afin de simplifier les calculs, on considérera que  $d_1 = d_2 = d$  et que  $\mathcal{V}_B = -\mathcal{V}_A$ .

## Notations et valeurs numériques :

Permittivité du vide .....	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Permittivité relative .....	$\epsilon_r$
Champ électrique en M .....	$\vec{E}(M)$
Densité surfacique de charge .....	$\sigma_Q$

## Potentiel électrostatique et champ électrostatique :

$$\mathcal{V}_N - \mathcal{V}_M = - \int_M^N \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

## Une formule d'analyse vectorielle :

On considère le champ scalaire suivant :  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors :

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} f)$$