Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 6

¤ Problème

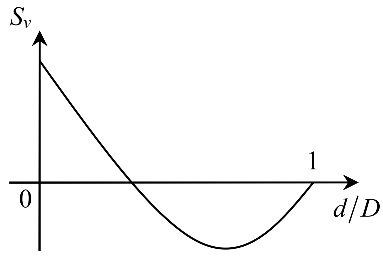
1.1. Actions exercées sur la cheminée : la réaction $\vec{R}$ du sol, de moment nul en O (liaison pivot parfaite) ; le poids $\vec{P} = M\vec{g}$, de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{P}\right) = \overrightarrow{OG} \times M\vec{g} = +Mg\dfrac{D}{2}\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}$. Théorème du moment cinétique en O pour la cheminée, dans le référentiel terrestre : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O\,\text{ext}}}$ avec $\overrightarrow{L_O} = J_{Oz}\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$. Projection sur $\overrightarrow{e_z}$: $\dfrac{1}{3}MD^2\ddot{\theta} = Mg\dfrac{D}{2}\sin\theta$ soit $\boxed{\ddot{\theta} = \dfrac{3g}{2D}\sin\theta}$.

1.2. La réaction $\vec{R}$ ne travaille pas (liaison pivot parfaite) et le poids est une force conservative : l'énergie mécanique se conserve, soit $E_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}MD^2\dot{\theta}^2 + Mg\dfrac{D}{2}\cos\theta = \text{cte} = Mg\dfrac{D}{2}$. On obtient en dérivant : $\dfrac{1}{3}MD^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - Mg\dfrac{D}{2}\dot{\theta}\sin\theta = 0$ d'où $\boxed{\ddot{\theta} = \dfrac{3g}{2D}\sin\theta}$ en excluant la solution particulière $\dot{\theta} = 0$ (équilibre).

1.3. Théorème de la résultante cinétique pour la cheminée : $M\vec{a}_{(\mathcal{R})}(G) = \vec{F}_\text{ext} = \vec{P} + \vec{R}$. Projection sur $\vec{u}$: $-M\dfrac{D}{2}\dot{\theta}^2 = -Mg\cos\theta + R_u$ avec $D\dot{\theta}^2 = 3g(1-\cos\theta)$ (conservation de l'énergie), donc $\boxed{R_u = Mg\left(\dfrac{5}{2}\cos\theta - \dfrac{3}{2}\right)}$. Projection sur $\vec{v}$: $M\dfrac{D}{2}\ddot{\theta} = +Mg\sin\theta + R_v$ avec $D\ddot{\theta} = \dfrac{3g}{2}\sin\theta$, donc $\boxed{R_v = -\dfrac{Mg\sin\theta}{4}}$.

1.4. Si la liaison est <u>unilatérale</u>, la réaction normale est toujours positive : $R_x > 0$. La cheminée décolle du sol si le calcul donne R_x qui s'annule et change de signe. Or $R_x = \vec{R}\cdot\overrightarrow{e_x} = R_u\cos\theta - R_v\sin\theta = Mg\left(\dfrac{5}{2}\cos^2\theta - \dfrac{3}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{4}\sin^2\theta\right) = \dfrac{Mg}{4}\left(9\cos^2\theta - 6\cos\theta + 1\right)$ $= \dfrac{Mg}{4}\left(3\cos\theta - 1\right)^2 \geq 0$. Donc la cheminée <u>ne décolle jamais</u>.

2.1. TRC pour la longueur d de cheminée : $M\dfrac{d}{D}\vec{a}_{(\mathcal{R})}(G_d) = M\dfrac{d}{D}\vec{g} + \vec{R} + \vec{S}$. Projection sur $\vec{v}$: $M\dfrac{d}{D}\dfrac{d}{2}\ddot{\theta} = +M\dfrac{d}{D}g\sin\theta + R_v + S_v \Leftrightarrow M\dfrac{d^2}{2D}\dfrac{3g}{2D}\sin\theta = +M\dfrac{d}{D}g\sin\theta - \dfrac{Mg\sin\theta}{4} + S_v$ d'où $\boxed{S_v = Mg\sin\theta\left(\dfrac{3d^2}{4D^2} - \dfrac{d}{D} + \dfrac{1}{4}\right)}$. La courbe est un arc de parabole courbé vers le haut. S_v s'annule pour $\dfrac{d}{D} = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{d}{D} = 1$ (valeur maximale, sommet de la cheminée).



2.2. L'effort de cisaillement est maximal en $d = 0$, c'est-à-dire <u>à la base de la cheminée</u>.

2.3. TMC en O pour la longueur d de cheminée : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L'_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}'_{O\,\text{ext}}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}M\dfrac{d}{D}d^2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_z} = \dfrac{d}{2}\vec{u} \times M\dfrac{d}{D}\vec{g} + d\vec{u}\times\vec{S} + \vec{C}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}M\dfrac{d^3}{D}\dfrac{3g}{2D}\sin\theta\,\overrightarrow{e_z} = Mg\dfrac{d^2}{2D}\sin\theta\,\overrightarrow{e_z} + d\,S_v\overrightarrow{e_z} + \vec{C} = Mg\dfrac{d^2}{2D}\sin\theta\,\overrightarrow{e_z} + dMg\sin\theta\left(\dfrac{3d^2}{4D^2} - \dfrac{d}{D} + \dfrac{1}{4}\right)\overrightarrow{e_z} + \vec{C}$ d'où

$\vec{C} = Mgd\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}\left[\dfrac{d^2}{2D^2} - \dfrac{d}{2D} - \left(\dfrac{3d^2}{4D^2} - \dfrac{d}{D} + \dfrac{1}{4}\right)\right] = Mgd\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}\left[-\dfrac{d^2}{4D^2} + \dfrac{d}{2D} - \dfrac{1}{4}\right]$ soit finalement $\boxed{\vec{C} = -\dfrac{1}{4}Mgd\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}\left(\dfrac{d}{D} - 1\right)^2}$.

2.4. La norme de $\vec{C}$ est maximale lorsque $f(d) = d\left(\dfrac{d}{D} - 1\right)^2 = \dfrac{d^3}{D^2} - \dfrac{2d^2}{D} + d$ est maximale. Or $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}d} = \dfrac{3d^2}{D^2} - \dfrac{4d}{D} + 1$, qui s'annule (comme vu à la question **2.1**) pour $\boxed{\dfrac{d}{D} = \dfrac{1}{3}}$ (maximum de C) et $\dfrac{d}{D} = 1$ (minimum nul). La brisure a donc lieu <u>à un tiers du bas de la cheminée</u>. La première photo correspond approximativement à ce cas de <u>brisure due au couple</u> ; en revanche sur la deuxième photo la rupture a lieu très près de la base, c'est donc plutôt un <u>effritement dû au cisaillement</u>.

¤ **Exercice**

1. $\overrightarrow{F_L} = \int_{\text{tige}} i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\int_{y=0}^{a} \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} \wedge B\,\overrightarrow{e_z} = iB\,\overrightarrow{e_x}\int_{y=0}^{a} \mathrm{d}y$ soit $\boxed{\overrightarrow{F_L} = +i(t)aB\,\overrightarrow{e_x}}$.

2. La tige est soumise à $\overrightarrow{F_L}$, à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\overrightarrow{e_z}$ et à la réaction des rails $\vec{R}_{\text{rails}} \perp \overrightarrow{e_x}$ (car il n'y a pas de frottements).

TQM pour la tige : $m\vec{a} = \overrightarrow{F_L} + \vec{P} + \vec{R}_{\text{rails}}$. On projette sur $\overrightarrow{e_x}$: $\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = +aB\,i(t)}$ (1).

3. On oriente e_{ind} <u>dans le sens du courant i</u> : $e_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\left(B\,\overrightarrow{e_z} \cdot a\,y\,\overrightarrow{e_z}\right)}{\mathrm{d}t}$ (champ uniforme sur le circuit) soit $\boxed{e_{\text{ind}} = -Bav(t)}$.

4. Loi des mailles : $E + u_C + e_{\text{ind}} - Ri = 0$ avec u_C en convention générateur. On dérive par rapport à t : $0 - \frac{i}{C} - aB\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ soit $\boxed{-\frac{aB}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = +\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}i(t)}$ (2).

5. On injecte (1) dans (2) : $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}i(t) = -\frac{aB}{R}\frac{aB}{m}i(t) \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{(aB)^2}{Rm}\right)i(t) = 0}$.

6. Solution : $i(t) = A\exp\left(-t/\tau\right)$ avec $\boxed{\tau = \left(\frac{1}{RC} + \frac{(aB)^2}{Rm}\right)^{-1}}$. AN $\boxed{\tau = 0{,}05\ \text{s}}$. À l'instant initial : $u_C = 0$ (condensateur déchargé), $e_{\text{ind}} = 0$ (tige immobile) donc $i(0) = \frac{E}{R} = A$ d'après la loi des mailles. Donc finalement : $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-t/\tau\right)}$.
