

Devoir d'entraînement de physique n° 7

Cet énoncé comporte deux problèmes.

Problème 1 (Centrale-Supélec TSI 2021) **Risque sismique pour un oléoduc**

L'oléoduc Bakou-Tbilissi-Ceyhan (parfois abrégé en oléoduc BTC), ouvert en 2005, transporte sur 1776 km le pétrole brut du champ pétrolifère d'Azeri-Chirag-Guneshli sur la mer Caspienne jusqu'à la mer Méditerranée (figure 1). Sa longueur est de 440 km en Azerbaïdjan, de 260 km en Géorgie et enfin de 1076 km en Turquie. L'oléoduc tire son nom de la traversée de Bakou, capitale de l'Azerbaïdjan, de Tbilissi, capitale de la Géorgie, et de Ceyhan, port du sud-est de la côte méditerranéenne turque. C'est le deuxième plus long oléoduc du monde après l'oléoduc Droujba qui relie la Russie à l'Europe centrale. Il est parallèle au gazoduc Bakou-Tbilissi-Erzurum.

La construction de l'oléoduc BTC a été l'un des plus importants projets de génie civil du début du XXI^e siècle, et certainement un des plus importants jamais conduits dans la partie orientale de l'Asie depuis la chute de l'Union soviétique. Sa construction a nécessité l'assemblage de 150 000 sections de tube de 12 m de long, correspondant à une masse de 594 000 tonnes. Il est prévu pour transporter un million de barils par jour.

Son architecture comprend 8 stations de pompage, deux stations intermédiaires de relayage et 101 postes de vannes d'arrêt. Le diamètre du tube est de 1070 mm sur sa plus grande longueur, se réduisant à 865 mm à l'approche de Ceyhan.

Le 10 mai 2006, du pétrole fut injecté, côté Bakou, dans l'oléoduc. Il parvint à Ceyhan le 28 mai 2006.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Quelques données utiles sont rassemblées en fin d'énoncé.

Le tracé de l'oléoduc emprunte trois failles actives en Azerbaïdjan, quatre en Géorgie et sept en Turquie. Les ingénieurs du projet ont dû donc équiper l'oléoduc de nombreuses solutions techniques afin de réduire sa vulnérabilité face aux déplacements de la croûte terrestre.

On s'intéresse dans cette partie à la propagation d'une onde mécanique longitudinale dans l'oléoduc. Chaque tronçon de l'oléoduc est modélisé par un point matériel de masse m , lié à ses voisins par des ressorts de même constante de raideur K (figure 6). À l'équilibre, les tronçons sont équidistants d'une distance a égale à la longueur à vide des ressorts. Chaque tronçon est repéré par un entier n . Lorsqu'une onde se propage, on note $x_n(t)$ le déplacement algébrique par rapport à l'équilibre du tronçon numéro n .

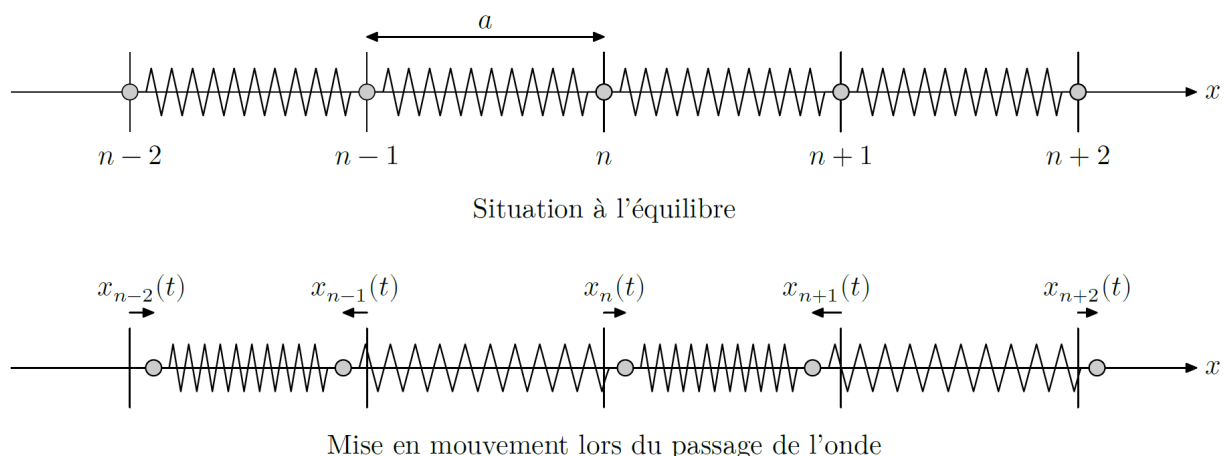


Figure 6 Représentation de la chaîne d'oscillateurs

Les frottements sont négligés dans cette étude. Le poids des tronçons est supposé compensé par une force de réaction verticale.

Q 24. En appliquant la seconde loi de Newton au tronçon numéro n , établir l'équation

$$\ddot{x}_n(t) = \Gamma(x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) - 2x_n(t)) \quad (\text{II.1})$$

et donner l'expression de Γ en fonction de K et m .

On s'intéresse à des ondes associées à des déplacements de la forme

$$x_n(t) = X_0 \cos(\omega t - kna)$$

avec X_0 , ω et k des constantes positives.

Q 25. Que représentent physiquement les constantes X_0 , ω et k ?

Q 26. En utilisant la notation complexe, montrer que la relation entre ω et k s'écrit

$$\omega^2 = 4\Gamma \sin^2(ka/2).$$

Cette relation est appelée relation de dispersion.

On suppose que la distance a entre deux tronçons consécutifs est très inférieure à la longueur d'onde λ de l'onde mécanique qui se propage : $ka \ll 1$.

Q 27. Montrer que la relation de dispersion se simplifie et en déduire que la célérité c de l'onde s'écrit

$$c = \sqrt{\Gamma a}.$$

On cherche à estimer la valeur de la constante de raideur K . Chaque tronçon de l'oléoduc est constitué par un cylindre creux possédant une certaine élasticité. La loi de Hooke exprime, dans le domaine d'élasticité d'un matériau, la force de traction T nécessaire pour allonger de ΔL une barre du matériau de section S et de longueur au repos L (figure 7). Elle s'écrit

$$T = ES \frac{\Delta L}{L}.$$

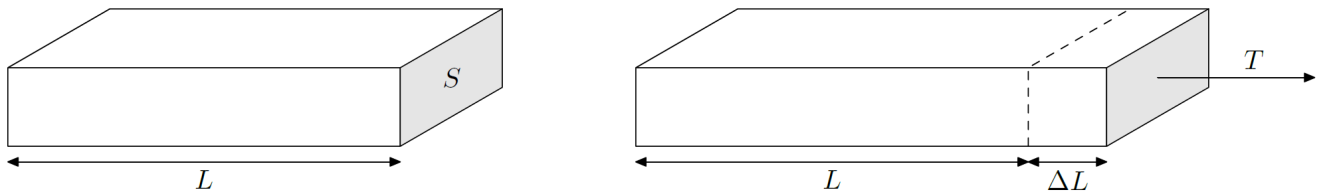


Figure 7 Loi de Hooke

Q 28. En utilisant la loi de Hooke et les données du préambule, estimer la valeur numérique de la constante de raideur K .

On fixe pour la suite les valeurs suivantes : $a = 12$ m, $K = 7 \times 10^8$ N·m⁻¹ et $m = 4$ tonnes.

Q 29. Calculer la valeur numérique de c .

Afin de vérifier les résultats précédents, on simule informatiquement la propagation de l'onde. On utilise un modèle discret comprenant $N = 100$ tronçons de masse m reliés par des ressorts de raideur K . Le premier et le dernier tronçon sont maintenus fixes, les autres sont libres de se déplacer le long d'un axe horizontal. À l'instant initial tous les tronçons sont au repos et le premier tronçon est brusquement déplacé de 5 cm. Il est ensuite maintenu dans cet état ($x_0(t \geq 0) = 0,05$ m).

On obtient les résultats graphiques représentés figure 8 pour les déplacements de l'ensemble de la chaîne de tronçons à différents instants ainsi que le déplacement du vingtième tronçon au cours du temps (figure 9).

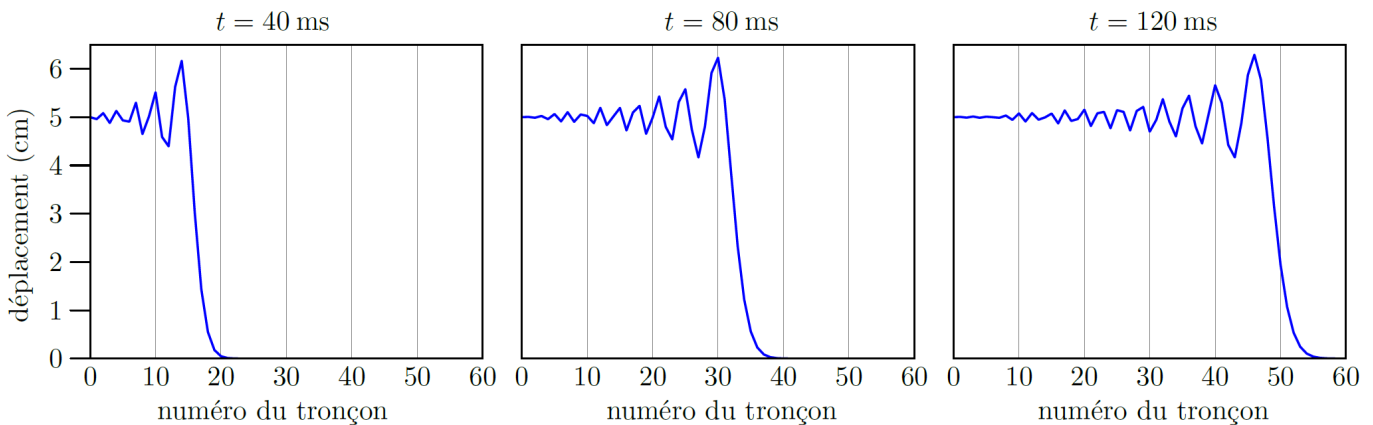


Figure 8 Déplacements des tronçons à différents instants t

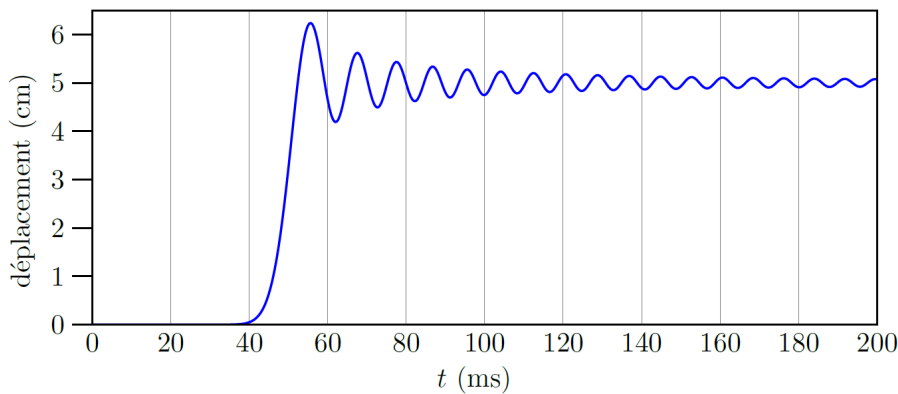


Figure 9 Déplacement du tronçon n°20

Q 30. Déterminer par lecture graphique les valeurs de la vitesse c de l'onde, de sa longueur d'onde λ et de la période T des oscillations d'un tronçon.

Q 31. Commenter ces résultats.

Données

Module de Young de l'acier

$E = 200 \text{ GPa}$

Masse volumique de l'acier

$\rho_a = 8000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Problème 2 (Mines-Ponts PSI 2014) De la physique autour d'un tore

II. — Étude d'un conducteur ohmique torique

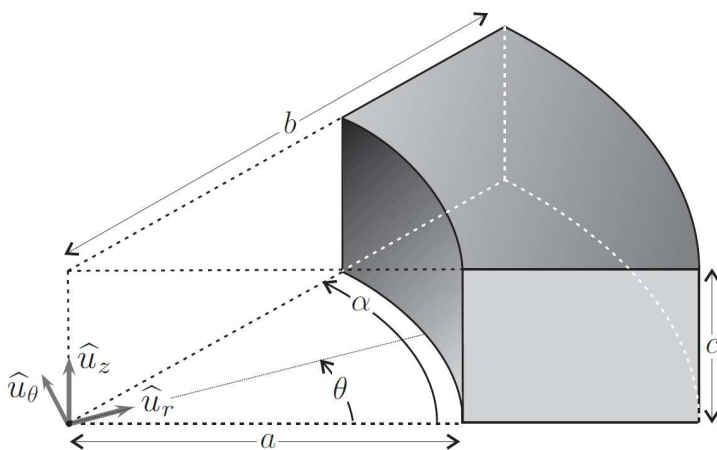


FIGURE 3 – Portion d'un conducteur torique

Un conducteur ohmique est caractérisé par une conductivité électrique γ de l'ordre de $10^8 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$. Il forme un tore tronqué de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c .

On cherche à déterminer la résistance orthoradiale R d'une portion de ce conducteur comprise entre les angles $\theta = 0$ où on applique un potentiel uniforme $V = U$ et $\theta = \alpha$ où on applique un potentiel $V = 0$.

□ **6** — On rappelle la valeur numérique

de la constante $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ dans les unités du système international. Rappeler le nom et l'unité pratique de cette constante.

□ **7** — Établir, dans un conducteur ohmique, l'équation différentielle vérifiée par la densité volumique de charge ρ . En déduire que $\rho \simeq 0$ tant que la durée T caractéristique de variation des grandeurs électromagnétiques est très supérieure à une durée τ dont on donnera l'expression en fonction de γ et ε_0 ainsi que la valeur numérique.

□ **8** — Montrer qu'un terme peut être négligé dans l'équation de Maxwell-Ampère si $T \gg \tau$.

□ **9** — Établir l'équation vérifiée en régime permanent et dans le conducteur ohmique par le potentiel électrique V .

□ **10** — On suppose que V ne dépend que de l'angle θ en coordonnées cylindriques et on donne, dans ce système de coordonnées, les expressions du gradient du potentiel $\text{grad}V = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{u}_\theta$ et de son laplacien $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$. Déterminer les expressions de $V(\theta)$, du champ \vec{E} et de la densité de courant \vec{j} .

□ 11 — Déterminer l'expression de l'intensité totale I traversant une section rectangulaire droite quelconque de ce tore. En déduire sa résistance orthoradiale R en fonction de a , b , c , γ et α .

□ 12 — Rappeler l'expression de la résistance d'un conducteur filiforme de section S et de longueur L . Vérifier qu'elle est cohérente avec l'expression du conducteur torique quand b est très proche de a .

III. — Étude d'une pince ampèremétrique

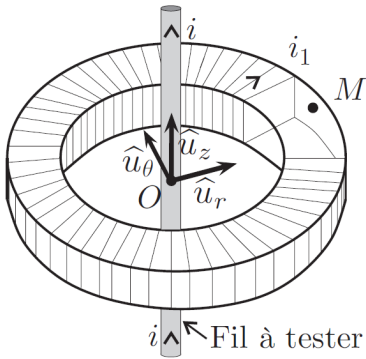


FIGURE 4 – Partie active de la pince

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant N spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b , d'épaisseur c , d'axe (O, z) . Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique λ .

Un point M intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$ avec $r \in [a, b]$ et $z \in [0, c]$.

Un fil rectiligne infini de même axe (O, z) est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On note $i_1(t)$ l'intensité du courant circulant dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

□ 13 — Rappeler ce qu'on appelle approximation des états quasi-stationnaires. Montrer que cette approximation permet de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Énoncer dans ce cas le théorème d'Ampère.

□ 14 — Montrer qu'au point M intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$ où l'on précisera l'expression de $B(r)$ en fonction de μ_0 , $i(t)$, $i_1(t)$, N et r .

□ 15 — Calculer le flux Φ de \vec{B} à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance L du bobinage et de mutuelle inductance M entre le fil et le bobinage.

□ 16 — Déterminer l'expression de la résistance totale R_p du bobinage en fonction de a , b , c , N et λ .

On se place en régime sinusoïdal forcé avec $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$ et $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$ associée à l'intensité complexe $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$.

□ 17 — Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$ en fonction de M , ω , R_p et L .

□ 18 — Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?