Complément mathématique
Fonctions de plusieurs variables et opérateurs différentiels

1. Fonctions de plusieurs variables

a) Dérivées partielles & différentielle

● En physique on rencontre souvent des fonctions de plusieurs variables, notamment deux (par exemple deux variables d'état en thermodynamique), trois (par exemple les trois coordonnées spatiales) ou quatre (coordonnées spatiales et temps). Nous envisageons ici le cas d'une fonction de trois variables $f(x,y,z)$, qui se transpose aux autres cas.
Introduisons les dérivées partielles par analogie avec la dérivée « ordinaire ».

● Pour une fonction d'une variable $f(x)$, la dérivée par rapport à x est notée $f'(x)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Lorsque la variable x varie d'une quantité infinitésimale dx, la fonction f varie de $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$: c'est la *différentielle* de f.

● De même, dans le cas d'une fonction $f(x,y,z)$, si x varie d'une quantité infinitésimale dx (les variables y et z restant fixes), la fonction f varie d'une quantité infinitésimale df proportionnelle à dx, le coefficient de proportionnalité étant cette fois la dérivée *partielle* de f par rapport à x, notée $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$ ou plus simplement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les autres variables. Elle se calcule simplement en dérivant f par rapport à x comme si y et z étaient des constantes.

– La même chose est vraie pour y et z, et finalement la variation totale de f, lorsque les trois variables varient, est la somme des trois variations précédentes, soit :

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\mathrm{d}z \text{ ou plus simplement } \boxed{\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z}.$$

Cette grandeur est la *différentielle* de $f(x,y,z)$.

Ⓔ Pour $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y}{z}$: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = \dfrac{2xy}{z}$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} = \dfrac{x^2}{z}$ et $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} = -\dfrac{x^2y}{z^2}$ donc $\mathrm{d}f = \dfrac{2xy}{z}\mathrm{d}x + \dfrac{x^2}{z}\mathrm{d}y - \dfrac{x^2y}{z^2}\mathrm{d}z$.

→ Pour $f(x,y) = A\exp(-kx)\cos(ky)$, montrer de même que $\mathrm{d}f = -kA\exp(-kx)\left[\cos(ky)\,\mathrm{d}x + \sin(ky)\,\mathrm{d}y\right]$.

b) Intégrales multiples

● Il s'agit souvent en physique d'intégrales portant sur deux ou trois variables d'espace : elles correspondent à la somme d'une certaine grandeur $f(M)$, c'est-à-dire dépendant de la position spatiale, somme calculée sur un volume ou une surface (l'ensemble des points M envisagés) : la forme générale est $\iiint_V f(M)\,\mathrm{d}\tau$ ou $\iint_S f(M)\,\mathrm{d}s$.

● Selon le système de coordonnées utilisé :
– en cartésiennes $f(M) = f(x,y,z)$ et l'élément de volume est $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$;
– en cylindriques $f(M) = f(r,\theta,z)$ et l'élément de volume est $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$;
– en sphériques $f(M) = f(r,\theta,\varphi)$ et l'élément de volume est $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

Si on intègre sur une surface, l'une des variables précédentes n'intervient pas (car elle reste constante sur toute la surface) : par exemple $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ou $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ si l'on intègre sur une surface plane (avec z = cte), ou bien $\mathrm{d}s = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ si l'on intègre sur une portion de sphère de centre O (donc r = cte).

● Le principe général est d'intégrer successivement selon les deux ou trois variables : lors de chaque intégration les autres variables sont traitées comme des constantes.

Ⓔ Volume d'une boule de centre O, de rayon R

Le volume est défini par : $V = \iiint \mathrm{d}\tau = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ (donc ici $f(M) = 1$).

Pour intégrer par rapport à φ on peut sortir de cette intégrale tout ce qui ne dépend pas de φ, c'est-à-dire tout sauf $\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$: on obtient donc $V = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$. De la même manière on peut sortir de l'intégrale en θ tout ce qui ne dépend pas de θ, c'est-à-dire $\int_{r=0}^{R} r^2\,\mathrm{d}r$: on obtient alors $V = \int_{r=0}^{R} r^2\,\mathrm{d}r\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$.

Finalement il ne reste qu'à calculer le produit de trois intégrales simples indépendantes :

$$V = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times \left[-\cos\theta\right]_0^\pi \times \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\times 2\times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

→ Retrouver de même les formules habituelles de l'aire d'un disque ($S = \pi R^2$, n'est-ce pas…) ou d'une sphère ($S = 4\pi R^2$), du volume d'un cylindre ($V = \pi R^2 H$).

2. Circulation & flux d'un champ de vecteurs

a) Circulation d'un champ de vecteurs

● Champ de vecteurs

Un champ de vecteurs est une fonction de la forme $\vec{A}(M)$, c'est-à-dire un vecteur dépendant des coordonnées spatiales, ou bien $\vec{A}(M,t)$ s'il dépend également du temps.

Ⓔ En physique on rencontre le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$, le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ …

● Définition de la circulation

Soit un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$ ou $\vec{A}(M,t)$ et une courbe Γ orientée (c'est-à-dire sur laquelle on a défini un sens de parcours). On appelle circulation de $\vec{A}(M)$ ou $\vec{A}(M,t)$ le long de la courbe Γ l'intégrale : $\boxed{C(\vec{A})_\Gamma = \int_\Gamma \vec{A}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$.

Le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ (tangent à la courbe) peut être noté aussi $\mathrm{d}\vec{\ell}$ ou $\mathrm{d}\vec{r}$.

Ⓔ Le travail d'une force $\vec{F}$ sur un point matériel M parcourant une trajectoire Γ est la circulation de $\vec{F}$ le long de Γ.

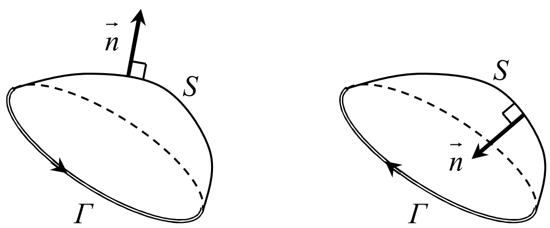
● Si Γ est une courbe fermée (dite aussi contour fermé), on note : $C(\vec{A})_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{A}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

b) Flux d'un champ de vecteurs

● Orientation d'une surface

Soit une surface S de l'espace, délimitée par un contour orienté Γ. En chaque point M de la surface on peut définir une direction orthogonale à la surface, et donc deux vecteurs unitaires correspondants, opposés l'un de l'autre.

On choisira d'appeler vecteur unitaire normal (en M à la surface S, orientée par Γ) le vecteur unitaire $\vec{n}$ orthogonal à S en M et dont l'orientation est liée à celle de Γ par la règle du tire-bouchon (ou règle des doigts de la main droite).



– Cas d'une surface fermée

Si S est fermée, elle n'a alors pas de contour ; en revanche elle a un intérieur et un extérieur. On choisira alors généralement le vecteur $\vec{n}$ orienté de l'intérieur vers l'extérieur (normale sortante, souvent notée $\overrightarrow{n_{\text{ext}}}$).

● Définition du flux

Soit un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$, et une surface S orientée.

On appelle flux de $\vec{A}(M)$ à travers S l'intégrale : $\boxed{\Phi(\vec{A})_S = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s}$.

Le produit $\vec{n}\,\mathrm{d}s$ peut être noté $\mathrm{d}\vec{s}$.

Ⓔ Le courant électrique I dans un conducteur est le flux du vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$ à travers la section S du conducteur.

● Si S est une surface fermée on note : $\Phi(\vec{A})_S = \oiint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s$.

3. Opérateurs différentiels

a) Opérateur gradient

● Définition

Il s'agit en quelque sorte d'une dérivée en trois dimensions, pour les fonctions dépendant de la position spatiale, de type $f(M)$, c'est-à-dire $f(x,y,z)$ ou $f(r,\theta,z)$ ou $f(r,\theta,\varphi)$ selon le système de coordonnées utilisé. Il peut s'agir aussi d'une fonction $f(M,t)$, mais la variable temps t n'intervient pas dans le calcul du gradient.

Nous avons vu que pour une fonction d'une seule coordonnée $f(x)$, lors d'un déplacement élémentaire dx la fonction varie de $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$.

De même pour une fonction $f(M)$, lors d'un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ (également noté $\mathrm{d}\vec{M}$ ou $\mathrm{d}\vec{r}$), la variation peut s'écrire $\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$: ceci constitue une définition du vecteur gradient de f, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$ ou éventuellement $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M f$ si l'on veut préciser que le gradient est calculé au point M.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f$ est donc une dérivée en trois dimensions, au sens où il indique non seulement (par sa norme) le taux de variation de la fonction f au point M, mais également (par sa direction et son sens) l'orientation spatiale de cette variation : le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ pointe vers les valeurs croissantes de f.

● Composantes dans les trois bases usuelles

– Dans la base cartésienne, un petit déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$.

En identifiant le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ avec la formule de la différentielle de f donné plus haut, on obtient :

$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \overrightarrow{e_x} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \overrightarrow{e_y} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \overrightarrow{e_z}$ ou plus simplement $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}}$.

– Dans la base cylindrique, un petit déplacement s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_z}$.

On obtient donc de la même manière : $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

– Dans la base sphérique, un petit déplacement s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$.

On obtient donc de la même manière : $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$.

● On peut introduire une autre notation pour le gradient, utilisant le vecteur symbolique $\vec{\nabla}$ *(nabla)*, dont les composantes en cartésiennes sont $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, autrement dit $\boxed{\vec{\nabla} = \overrightarrow{e_x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_y}\dfrac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_z}\dfrac{\partial}{\partial z}}$.

En cylindriques : $\vec{\nabla} = \overrightarrow{e_r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\overrightarrow{e_\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \overrightarrow{e_z}\dfrac{\partial}{\partial z}$.   En sphériques : $\vec{\nabla} = \overrightarrow{e_r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\overrightarrow{e_\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\overrightarrow{e_\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$.

Le gradient de f est le produit symbolique de $\vec{\nabla}$ par f, soit $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \vec{\nabla} f}$. L'intérêt de ce vecteur nabla est qu'il permet de représenter aussi d'autres opérateurs différentiels : divergence, rotationnel, laplacien.

b) Opérateur divergence

● Définition

La divergence d'un champ de vecteur $\vec{A}(x,y,z)$ $\left[\text{ou } \vec{A}(x,y,z,t)\right]$ est un scalaire, noté $\mathrm{div}\,\vec{A}$, qui donne une indication sur la manière dont ses lignes de champ divergent (si elle est positive) ou convergent (si elle est négative) au voisinage d'un point M.

On peut la définir à l'aide du vecteur nabla : $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}$.

● Expressions dans les trois systèmes de coordonnées

– En coordonnées cartésiennes, un champ de vecteurs s'écrit $\vec{A} = A_x(x,y,z)\overrightarrow{e_x} + A_y(x,y,z)\overrightarrow{e_y} + A_z(x,y,z)\overrightarrow{e_z}$ et sa divergence est : $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}}$.

– En coordonnées cylindriques, un champ de vecteurs s'écrit $\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\overrightarrow{e_r} + A_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{e_\theta} + A_z(r,\theta,z)\overrightarrow{e_z}$ et sa divergence est : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$ (cette formule plus compliquée vient du fait que l'on dérive aussi les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ par rapport à θ).

– En coordonnées sphériques, un champ de vecteurs s'écrit $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + A_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$ et sa divergence est : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta\, A_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$ (on dérive les vecteurs unitaires par rapport à θ et φ).

● Théorème d'Ostrogradski (ou de Green–Ostrogradski, ou d'Ostrogradski–Gauss, ou de flux–divergence…)

Pour une surface fermée Σ enfermant un volume V : $\boxed{\oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{n_{\mathrm{ext}}}\,\mathrm{d}s = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}$

où $\overrightarrow{n_{\mathrm{ext}}}$ est un vecteur normal sortant (vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'extérieur de celle-ci).

Sous forme de phrase : le flux d'un champ de vecteur $\vec{A}$ sortant d'une surface fermée Σ est égal à l'intégrale sur le volume intérieur à Σ de la divergence de $\vec{A}$.

c) Opérateur laplacien

● Définition du laplacien d'un scalaire

Le laplacien d'un champ scalaire est par définition : $\boxed{\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right) = \nabla^2 f}$.

(La notation Δ est la même que pour la variation d'une grandeur entre deux états, donc attention aux confusions.)
Qualitativement, le laplacien est une mesure de la différence entre la valeur moyenne de f au voisinage de M et la valeur de f au point M lui-même. C'est aussi une mesure de la courbure locale de la fonction, ce qui est difficile à visualiser au-delà de deux dimensions ; lorsque le laplacien est nul partout, la fonction est « plate » (c'est-à-dire varie de façon affine en fonction de chaque coordonnée cartésienne).

● Expressions dans les trois systèmes de coordonnées

– En coordonnées cartésiennes : $\boxed{\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$.

– En coordonnées cylindriques : $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

– En coordonnées sphériques : $\Delta f = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$.

● Laplacien d'un vecteur

Le laplacien d'un champ vectoriel $\vec{A}$ est un vecteur, dont les trois composantes dans une base cartésienne sont les laplaciens des trois composantes de $\vec{A}$: $\boxed{\Delta\vec{A} = \Delta A_x\,\vec{e_x} + \Delta A_y\,\vec{e_y} + \Delta A_z\,\vec{e_z}}$.

Les expressions dans les bases cylindrique et sphérique sont beaucoup plus complexes.

<u>d) Opérateur rotationnel</u>

● Définition

Le rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{A}(M,t)$ est un vecteur, noté $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$, qui donne une indication sur la manière dont ses lignes de champ ont tendance à tourner autour d'un point M.

On peut le définir à l'aide du vecteur nabla : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}}$.

● Expressions dans les trois systèmes de coordonnées

– En coordonnées cartésiennes, un champ de vecteurs s'écrit $\vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{e_x} + A_y(x,y,z)\vec{e_y} + A_z(x,y,z)\vec{e_z}$ et son rotationnel est : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}}$.

– En coordonnées cylindriques, un champ de vecteurs s'écrit $\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\vec{e_r} + A_\theta(r,\theta,z)\vec{e_\theta} + A_z(r,\theta,z)\vec{e_z}$ et son rotationnel est : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}$.

– En coordonnées sphériques, un champ de vecteurs s'écrit $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\vec{e_r} + A_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e_\theta} + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e_\varphi}$ et son rotationnel est : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e_r} + \left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_\varphi}$.

● Théorème de Stokes

Pour tout contour fermé orienté Γ délimitant une surface Σ : $\boxed{\oint_\Gamma \vec{A}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s}$

où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la surface, orienté en fonction de l'orientation choisie sur le contour.

Sous forme de phrase : la circulation d'un champ de vecteur $\vec{A}$ le long d'un contour fermé Γ est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface Σ délimitée par Γ.

<u>e) Combinaisons d'opérateurs différentiels ou de champs</u>

● Combinaison d'opérateurs sur un même champ

Pour tout champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$: $\boxed{\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = 0}$ et $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}}$.

Pour tout champ scalaire $f(M,t)$: $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right) = \vec{0}}$.

● Action d'un opérateur sur un produit

Pour deux champs vectoriels $\vec{A}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$: $\boxed{\text{div}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}}$.

Pour un champ scalaire $f(M,t)$ et un champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$:

$\boxed{\text{div}\left(f\vec{A}\right) = f\,\text{div}\,\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f\cdot\vec{A}}$ et $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\vec{A}\right) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f\wedge\vec{A}}$.