On4 – Corrigé des exercices 2 et 3

¤ Exercice 2

a) Pour une OPPH obéissant à l'équation de D'Alembert : $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$.

b) Onde incidente : $\underline{p}_{\mathrm{i}}(M,t) = \underline{p}_{\mathrm{i}0} \exp j(\omega t - kx)$ et $\overrightarrow{\underline{v}_{\mathrm{i}}}(M,t) = +\dfrac{\underline{p}_{\mathrm{i}}(M,t)}{Z_{\mathrm{a}}}\overrightarrow{e_x} = +\dfrac{\underline{p}_{\mathrm{i}0}}{Z_{\mathrm{a}}} \exp j(\omega t - kx)\overrightarrow{e_x}$.

Onde réfléchie : $\underline{p}_{\mathrm{r}}(M,t) = \underline{p}_{\mathrm{r}0} \exp j(\omega t + kx)$ et $\overrightarrow{\underline{v}_{\mathrm{r}}}(M,t) = -\dfrac{\underline{p}_{\mathrm{r}0}}{Z_{\mathrm{a}}} \exp j(\omega t + kx)\overrightarrow{e_x}$.

Onde transmise : $\underline{p}_{\mathrm{t}}(M,t) = \underline{p}_{\mathrm{t}0} \exp j(\omega t - kx)$ et $\overrightarrow{\underline{v}_{\mathrm{t}}}(M,t) = +\dfrac{\underline{p}_{\mathrm{t}0}}{Z_{\mathrm{a}}} \exp j(\omega t - kx)\overrightarrow{e_x}$.

c) On applique le PFD (ou TRC) à la paroi, d'aire S donc de masse σS, soumise aux forces de pression du fluide des deux côtés, ainsi qu'à des forces verticales (poids et réaction du support de la paroi) :

$$\sigma S \vec{a} = +P_1(0^-,t) S \overrightarrow{e_x} - P_2(0^+,t) S \overrightarrow{e_x} + m\vec{g} + \vec{R} = +p_1(0^-,t) S \overrightarrow{e_x} - p_2(0^+,t) S \overrightarrow{e_x} + m\vec{g} + \vec{R}$$

Projection sur $\overrightarrow{e_x}$: $\sigma \dfrac{\mathrm{d}^2 \xi_0}{\mathrm{d}t^2} = p_1(0^-,t) - p_2(0^+,t)$.

L'excitation (onde incidente) étant sinusoïdale, en régime permanent le mouvement de la paroi est aussi sinusoïdal : on peut écrire en complexes $\underline{\xi}_0(t) = \underline{\xi}_{\mathrm{m}} \exp(j\omega t)$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}^2 \underline{\xi}_0}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 \underline{\xi}_0$. On a donc obtenu : $\boxed{-\sigma\omega^2 \underline{\xi}_0(t) = \underline{p}_1(0^-,t) - \underline{p}_2(0^+,t)}$.

– D'autre part, il y a continuité de la vitesse normale (c'est-à-dire de la vitesse tout court) sur chaque face de la paroi :
$\overrightarrow{v_1}(0^-,t) = \overrightarrow{v_2}(0^+,t) = \overrightarrow{v_{\mathrm{paroi}}}(t)$ soit en complexes $\boxed{\overrightarrow{\underline{v}_1}(0^-,t) = \overrightarrow{\underline{v}_2}(0^+,t) = j\omega \underline{\xi}_0(t)\overrightarrow{e_x}}$ (deux équations).

d) De façon habituelle, $\underline{p}_1 = \underline{p}_{\mathrm{i}} + \underline{p}_{\mathrm{r}}$ et $\underline{p}_2 = \underline{p}_{\mathrm{t}}$. Les conditions aux limites deviennent : $-\sigma\omega^2 \underline{\xi}_{\mathrm{m}} = \underline{p}_{\mathrm{i}0} + \underline{p}_{\mathrm{r}0} - \underline{p}_{\mathrm{t}0}$ (1)

$\dfrac{\underline{p}_{\mathrm{i}0}}{Z_{\mathrm{a}}} - \dfrac{\underline{p}_{\mathrm{r}0}}{Z_{\mathrm{a}}} = j\omega\underline{\xi}_{\mathrm{m}}$ (2) et $\dfrac{\underline{p}_{\mathrm{t}0}}{Z_{\mathrm{a}}} = j\omega\underline{\xi}_{\mathrm{m}}$ (3) . On injecte (3) dans (1) et (2) : $\begin{cases} \dfrac{\sigma j\omega}{Z_{\mathrm{a}}} \underline{p}_{\mathrm{t}0} = \underline{p}_{\mathrm{i}0} + \underline{p}_{\mathrm{r}0} - \underline{p}_{\mathrm{t}0} \\ \underline{p}_{\mathrm{i}0} - \underline{p}_{\mathrm{r}0} = \underline{p}_{\mathrm{t}0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sigma j\omega}{Z_{\mathrm{a}}} \underline{t} = 1 + \underline{r} - \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \underline{t} \end{cases}$

d'où finalement $\boxed{\underline{t} = \dfrac{2}{2 + \sigma j\omega/Z_{\mathrm{a}}}}$ et $\boxed{\underline{r} = \dfrac{\sigma j\omega/Z_{\mathrm{a}}}{2 + \sigma j\omega/Z_{\mathrm{a}}}}$.

Le coefficient de transmission a la forme caractéristique d'un <u>passe-bas d'ordre 1</u> : <u>la paroi laisse passer surtout les sons graves</u>.

e) Intensités acoustiques : $I_{\mathrm{i}} = \langle \overrightarrow{\Pi_{\mathrm{i}}} \cdot \overrightarrow{e_x} \rangle = \langle p_{\mathrm{i}} \overrightarrow{v_{\mathrm{i}}} \cdot \overrightarrow{e_x} \rangle = \dfrac{\langle p_{\mathrm{i}}^2 \rangle}{Z_{\mathrm{a}}}$ d'où en complexes $I_{\mathrm{i}} = \dfrac{|\underline{p}_{\mathrm{i}0}|^2}{Z_{\mathrm{a}}}$; de même $I_{\mathrm{r}} = \dfrac{|\underline{p}_{\mathrm{r}0}|^2}{Z_{\mathrm{a}}}$ et $I_{\mathrm{t}} = \dfrac{|\underline{p}_{\mathrm{t}0}|^2}{Z_{\mathrm{a}}}$.

Alors $R = \dfrac{I_{\mathrm{r}}}{I_{\mathrm{i}}} = |\underline{r}|^2$ soit $\boxed{R = \dfrac{(\sigma\omega/Z_{\mathrm{a}})^2}{4 + (\sigma\omega/Z_{\mathrm{a}})^2}}$ et $T = \dfrac{I_{\mathrm{t}}}{I_{\mathrm{i}}} = |\underline{t}|^2$ soit $\boxed{T = \dfrac{4}{4 + (\sigma\omega/Z_{\mathrm{a}})^2}}$. On trouve bien $R + T = 1$.

f) Rappel : $I_{\mathrm{dB}} = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$. Une atténuation de 30 dB (en transmission) correspond à $T = 10^{-3}$.

$$T = \frac{4}{4 + (\rho e\omega/Z_{\mathrm{a}})^2} = 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\frac{\rho e\omega}{Z_{\mathrm{a}}}\right)^2 = \frac{4}{T} - 4 \approx 4000 \text{ d'où } \boxed{e = \sqrt{4000}\frac{Z_{\mathrm{a}}}{\rho\omega} = \sqrt{4000}\frac{\rho_{0,\mathrm{air}} c_{\mathrm{air}}}{\rho 2\pi f}}.$$

AN $e = \sqrt{4000}\dfrac{1{,}2 \times 340}{2500 \times 6{,}28 \times 1000}$ soit $\boxed{e = 1{,}6 \text{ mm}}$. Cet ordre de grandeur semble correct par rapport aux vitres usuelles.

¤ Exercice 3

a) Lampe 3 : <u>polarisation elliptique</u>. Lampe 4 : <u>polarisation rectiligne</u>.

b) On intercale entre la lampe à analyser et le polariseur <u>une lame quart d'onde</u>. La lumière de polarisation circulaire sera transformée en lumière de polarisation rectiligne, et celle-ci donnera donc deux maxima et deux minima nuls.

La lumière non polarisée reste non polarisée, donc ne donne toujours aucune variation d'intensité lorsqu'on tourne le polariseur.