

Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 1

□ Premier problème

1. $C_p - C_v = nR$ (relation de Mayer) et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, d'où $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ et $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$. De plus $P_0 V_A = nRT_0$, donc $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0 V_A}{T_0} = \gamma C_v$.

2. La transformation 0-1 est isochore (volume V_A constant), et réversible (donc quasi statique) comme les autres.

3. PFD à l'équilibre pour le piston dans le référentiel terrestre galiléen : $\vec{P} + \vec{F}_{p, sup} + \vec{F}_{p, inf} = \vec{0}$. Projection sur \vec{e}_z :

$-mg + P_1 S - P_0 S = 0$ d'où $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$. De plus $P_1 V_A = nRT_1$ donc $T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0}$ soit $T_1 = T_0 \left(1 + \frac{mg}{P_0 S}\right)$. AN $P_1 = 1,1 \text{ bar}$, $T_1 = 330 \text{ K}$.

4. Premier principe pour le gaz enfermé sur 0-1 : $U_1 - U_0 = W_0^1 + Q_0^1$ avec $W_0^1 = 0$ (isochore), d'où $Q_0^1 = C_v(T_1 - T_0)$, soit d'après la question 1, $Q_0^1 = \frac{P_0 V_A}{\gamma-1} \left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)$. AN $Q_0^1 = 8,2 \text{ J}$.

5. Le chauffage étant très lent (donc transformation quasi statique), le piston est toujours pratiquement à l'équilibre mécanique. D'après le raisonnement de la question 3, la pression dans le gaz a donc toujours la même valeur P_1 : la transformation 1-2 est isobare.

6. $P_1 V_A = nRT_1$ et $P_1 V_B = nRT_2$, donc $T_2 = T_1 \frac{V_B}{V_A}$. AN $T_2 = 1000 \text{ K}$.

7. Sur une isobare : $H_2 - H_1 = Q_1^2$ soit $Q_1^2 = C_p(T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0 V_A}{T_0} (T_2 - T_1)$ soit $Q_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0 T_1}{T_0} (V_B - V_A)$. AN $Q_1^2 = 260 \text{ J}$.

8. La transformation 2-3 est isochore (volume V_B constant), puis la transformation 3-0, comme la 1-2, est isobare (à la pression P_0). (Attention, la transformation 2-3 n'est pas isobare à P_1 : dans le PFD appliqué au piston, il faudrait ajouter ici la réaction des cales.)

9. - Méthode 1 : on calcule les travaux sur chaque étape. Le travail est nul sur 0-1 et 2-3 (isochores). Sur les isobares :

$W_{12}^2 = -\int P_1 dV = -P_1(V_B - V_A)$ et de même $W_{30}^0 = -P_0(V_A - V_B)$. Total : $W = (P_1 - P_0)(V_A - V_B)$ soit $W = \frac{mg}{S} (V_A - V_B)$.

- Méthode 2 : on considère *avec qui* le travail est échangé. Sur 0-1 et 2-3, il n'y a aucun travail (car aucun mouvement). Sur 1-2 le gaz fait monter le piston et la masse m , puis sur 3-0 le piston seul redescend : le travail total W sur le cycle est donc celui fourni par le gaz à la masse m lors de la montée. Théorème de l'énergie cinétique pour m entre 1 et 2 : $\Delta E_c = W(\vec{P}) + (-W)$ soit $0 = mg(z_A - z_B) - W$

d'où $W = mg \frac{V_A - V_B}{S}$. AN $W = -6,7 \text{ J}$.

10. $r = \frac{|W|}{Q_0^1 + Q_1^2}$ puisque Q_0^1 et Q_1^2 sont les deux transferts thermiques effectivement fournis au gaz (positifs), lors du chauffage.

AN $r = 0,025$ (soit 2,5 %). Ce rendement est très faible, comparé à celui des moteurs usuels : ici 97,5 % de la chaleur fournie part dans l'air environnant.

11. Les deux transformations isochores correspondant à des segments verticaux, et les deux isobares à des segments horizontaux.

12. Le travail total est, en valeur absolue, l'aire du cycle : $|W| = (P_1 - P_0)(V_B - V_A) = \frac{mg}{S} (V_B - V_A)$.

De plus W est négatif, puisque c'est un moteur, donc $W = \frac{mg}{S} (V_A - V_B)$.

13. Les courbes isothermes ont une équation de la forme $PV = cte (= nRT)$, les adiabatiques ont une équation de la forme $PV^\gamma = cte$ (loi de Laplace).

14. Les seuls transferts thermiques ont lieu sur les deux isothermes 2'-3' et sur 4'-1. Alors le premier principe pour le gaz s'écrit : $W + Q = \Delta U$ avec $\Delta U = 0$ (première loi de Joule), d'où

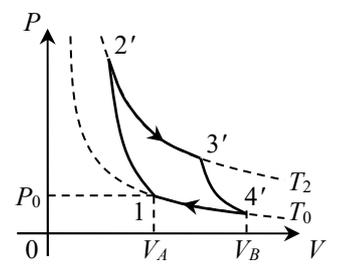
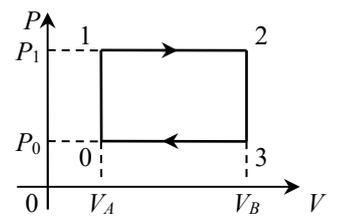
$Q_4^1 = -W_4^1 = + \int P dV = nRT_0 \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln \frac{V_A}{V_B}$ soit $Q_4^1 = P_0 V_A \ln \frac{V_A}{V_B}$. AN $Q_4^1 = -37 \text{ J}$. De

même $Q_2^3 = -W_2^3 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = P_0 V_A \frac{T_2}{T_0} \ln \frac{V_3}{V_2}$. De plus, la loi de Laplace sur 1-2' et 3'-4' s'écrit :

$T_0 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ et $T_0 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$. En divisant membre à membre il vient : $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_2}{V_3}$, d'où $Q_2^3 = P_0 V_A \frac{T_2}{T_0} \ln \frac{V_B}{V_A}$. AN $Q_2^3 = +122 \text{ J}$.

15. Premier principe sur un cycle : $W' + Q_4^1 + Q_2^3 = \Delta U = 0$ d'où $W' = -Q_2^3 - Q_4^1 = P_0 V_A \ln \frac{V_B}{V_A} \left(1 - \frac{T_2}{T_0}\right)$. AN $W' = -85 \text{ J}$.

16. $r' = \frac{|W'|}{Q_2^3} = 1 - \frac{T_0}{T_2}$. AN $r' = 0,70$ (soit 70 %). Ce rendement est beaucoup plus élevé que le précédent, utilisant les deux mêmes sources de chaleur (c'est pourquoi le premier était qualifié de « peu performant »).



□ **Deuxième problème**

0. h étant l'enthalpie massique et D le débit massique : $\Delta h = w_u + q$; $D \Delta h = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_h$ (si on néglige les variations d'énergie cinétique).

1. Pour un gaz diatomique comme le diazote, dans les conditions usuelles : $C_v = \frac{5}{2} nR$ et $C_p = \frac{7}{2} nR$ donc $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$.

Pour chaque compresseur adiabatique réversible, on peut appliquer la loi de Laplace : $T_{\text{sortie}}^\gamma p_{\text{sortie}}^{1-\gamma} = T_{\text{entrée}}^\gamma p_{\text{entrée}}^{1-\gamma} \Leftrightarrow T_{\text{sortie}} = T_{\text{entrée}} r^{(\gamma-1)/\gamma}$. Or

$$r^N = \frac{p_A}{p_E} = 100. \text{ La condition } T_{\text{sortie}} < T_{\text{max}} \text{ équivaut donc à } T_E \left(\frac{p_A}{p_E} \right)^{(\gamma-1)/\gamma N} < T_{\text{max}} \Leftrightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma N} \ln \frac{p_A}{p_E} < \ln \frac{T_{\text{max}}}{T_E} \Leftrightarrow N > \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\ln(p_A/p_E)}{\ln(T_{\text{max}}/T_E)}.$$

AN $N > 4,6$ donc $N_{\text{min}} = 5$.

2. Dans le cas réversible, $S = C_p \ln T - nR \ln p = \text{cte}$. L'irréversibilité entraîne une augmentation de S , donc pour une même augmentation de T (si on veut toujours limiter la température à T_{max}), on a une moindre augmentation de la pression (r diminue). Si on veut garder un rapport global $r^N = p_A/p_E$ constant, il faut donc augmenter N .

3. Dans le réfrigérant il n'y a pas de travail utile (pas de pièces mobiles). Premier principe pour l'écoulement d'eau : $D_{\text{eau}} c_e (T_{\text{sortie eau}} - T_e) = \mathcal{P}_{\text{th (eau)}}$. Pour le diazote : $D c_p (T_E - T_{\text{sortie (C)}}) = \mathcal{P}_{\text{th (diazote)}}$ avec $T_{\text{sortie (C)}} = T_E r^{(\gamma-1)/\gamma} = T_E (p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N}$ et

$$\mathcal{P}_{\text{th (diazote)}} = -\mathcal{P}_{\text{th (eau)}}. \text{ Donc } D_{\text{eau}} c_e (T_{\text{sortie eau}} - T_e) = -D c_p (T_E - T_{\text{sortie (C)}}) \Leftrightarrow \frac{D_{\text{eau}}}{D} = \frac{\gamma R T_E ((p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N} - 1)}{(\gamma-1) M c_e (T_{\text{sortie eau}} - T_e)}. \text{ Pour respecter la}$$

$$\text{contrainte } T_{\text{sortie eau}} < T'_{\text{max}}, \text{ il faut donc : } \frac{D_{\text{eau}}}{D} > \frac{\gamma R T_E ((p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N} - 1)}{(\gamma-1) M c_e (T'_{\text{max}} - T_e)}. \text{ AN } \frac{D_{\text{eau}}}{D} > 0,32.$$

4. Sur la courbe c_1 la température T est conservée (courbe isotherme). À basse pression on tend vers le modèle du gaz parfait : alors l'enthalpie massique ne dépend que de la température (deuxième loi de Joule), d'où une asymptote verticale.

5. Sur la courbe c_2 l'entropie massique s est conservée (courbe isentropique). D'après l'expression $s = c_p \ln T - r \ln p = \text{cte}$, lorsque p augmente, T augmente donc h augmente aussi : cette courbe a donc une pente positive dans le diagramme.

6. Sur la courbe de saturation c_3 , le diazote est sous forme liquide à gauche du point O (courbe d'ébullition) et sous forme gazeuse à droite du point O (courbe de rosée). Au point O la distinction entre liquide et gaz disparaît (un unique état fluide).

7. Sur la courbe c_4 le titre massique en liquide x est conservé (courbe isotitre). En M , on a un état diphasé avec $x = 0,1$ soit 10 % en masse de liquide et 90 % de gaz, à la pression $p = 0,6$ bar et à la température $T = -200$ °C.

8. Les fractions étant x pour le liquide et $1-x$ pour le gaz : $h_C = x h_{\text{liq}} + (1-x) h_{\text{vap}}$.

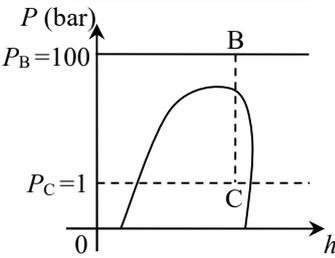
9. En régime permanent, la fraction x est constante, donc les deux phases sont dans les mêmes proportions à l'entrée et à la sortie. Le débit de liquide sortant est donc $D_m = x D$, et le débit de gaz sortant est de même $D' = (1-x) D$.

10. Dans (E) on applique le premier principe pour les deux écoulements (sans travail utile) : $D'(h_E - h_D) = \mathcal{P}_{\text{th (flux DE)}}$ et $D(h_B - h_A) = \mathcal{P}_{\text{th (flux AB)}}$ avec $\mathcal{P}_{\text{th (flux AB)}} = -\mathcal{P}_{\text{th (flux DE)}}$, $h_B = h_C$ (vanne (V) isenthalpique) et $h_D = h_{\text{vap}}$ (puisqu'on récupère seulement la vapeur au point D). Donc $(1-x)D(h_E - h_D) = -D(h_C - h_A) \Leftrightarrow (1-x)(h_E - h_{\text{vap}}) = -(x h_{\text{liq}} + (1-x) h_{\text{vap}} - h_A) \Leftrightarrow (1-x)h_E = -x h_{\text{liq}} + h_A$

$$\text{d'où finalement } x = \frac{h_E - h_A}{h_E - h_{\text{liq}}}.$$

11. On lit pour A (vapeur à 100 bar et 27 °C) : $h_A = 495 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; pour E (vapeur à 1 bar et 27 °C) : $h_E = 515 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; pour le liquide saturant à 1 bar et -196 °C : $h_{\text{liq}} = 82 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; pour la vapeur saturante à 1 bar et -196 °C : $h_{\text{vap}} = 283 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

On en déduit $x = 0,046$ (ou 4,6 %). Dans l'hypothèse du gaz parfait, on aurait $h_E - h_A = c_p (T_E - T_A) = 0$ donc $x = 0$.

12.  L'isobare 100 bar passe au-dessus de la courbe de saturation, cette pression étant nettement supérieure à celle du point critique : le diazote se trouve en B à l'état de fluide supercritique. Pour lire la température en B, on place ce point à la verticale de C ($h_B = h_C$ car la vanne (V) est isenthalpique), le point C étant lui-même placé sur l'isobare 1 bar avec $x = 0,046$. On trouve en lisant les isothermes : $T_B = -116$ °C.

13. Premier principe pour le fluide dans chaque compresseur adiabatique : $D \Delta h = \mathcal{P}_u$ soit $\mathcal{P}_u = D c_p T_E ((p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N} - 1)$. La

$$\text{puissance totale des } N \text{ compresseurs est donc } \mathcal{P}'_{u(\text{tot})} = N \frac{D_m}{x} \frac{\gamma R T_E ((p_A/p_E)^{(\gamma-1)/\gamma N} - 1)}{(\gamma-1) M}. \text{ AN } \mathcal{P}'_{u(\text{tot})} = 306 \text{ kW}.$$

Dans le texte cité, le débit volumique est $D'_v = 1 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1} = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, donc en évaluant le volume massique du diazote liquide à $v = 0,0016 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ (par comparaison avec l'eau à $18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, et le diazote liquide étant à gauche de l'isochore $0,005 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$), on

obtient $D'_m = \frac{D'_v}{v} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Le rapport des débits des deux machines est $\frac{D_m}{D'_m} = 170$ pour un rapport de puissances $\frac{\mathcal{P}'_{u(\text{tot})}}{\mathcal{P}'_{u(\text{tot})}} = 140$:

les performances sont similaires.