

## Th1 – Corrigé des exercices 1, 3, 4, 5

### Exercice 1

a) Si  $T > T_0$  alors  $\delta Q < 0$  (la résistance cède de la chaleur à l'extérieur) ; si  $T < T_0$  alors  $\delta Q > 0$  (la résistance reçoit de la chaleur de l'extérieur) ; donc  $a < 0$ . Équation aux dimensions :  $\dim(a) = \frac{\dim(\delta Q)}{\dim[C(T-T_0)dt]} = \frac{E}{E \cdot T^{-1} \cdot T \cdot t}$  soit  $\dim(a) = t^{-1}$  (inverse d'un temps).

On pourrait donc remplacer la notation  $a$  par une notation de la forme  $-1/\tau$ .

b) Premier principe pour la résistance entre  $t$  et  $t + dt$  :  $dH = \delta Q + \delta W_{\text{elec}}$  (transformation monobare). On exprime chaque terme :

$$C dT = aC(T - T_0)dt + RI^2 dt \quad \text{d'où l'équation différentielle} \quad \frac{dT}{dt} - aT = -aT_0 + \frac{RI^2}{C}. \quad \text{Solution : } T = T_0 - \frac{RI^2}{aC} + A \exp(at).$$

Conditions initiales :  $T(0) = T_0 = T_0 - \frac{RI^2}{aC} + A$  d'où  $A = \frac{RI^2}{aC}$ . Donc  $T(t) = T_0 + \frac{RI^2}{aC} (\exp(at) - 1)$ .

Au bout d'une longue durée (régime permanent) :  $T_{\text{lim}} = T_0 - \frac{RI^2}{aC} (> T_0)$ .

c) En régime transitoire (étudié ici), le premier principe montre que le travail électrique est converti en énergie interne de la résistance et en transfert thermique vers l'air extérieur.

Lorsque le régime permanent est atteint, le bilan énergétique devient  $\delta Q + \delta W_{\text{elec}} = 0$  : le travail électrique reçu par la résistance est alors (et seulement alors) entièrement converti en transfert thermique vers l'air extérieur.

### Exercice 3

a) On réécrit  $S(U, V) = C_V \ln\left(U + \frac{n^2 a}{V}\right) + nR \ln(V - nb) + S_0 - C_V \ln\left(U_0 + \frac{n^2 a}{V_0}\right) - nR \ln(V_0 - nb)$  (les trois derniers termes sont des

constantes). Différentielle :  $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U dV$  soit  $dS = \frac{C_V}{U + \frac{n^2 a}{V}} dU + \left(\frac{-C_V \frac{n^2 a}{V^2}}{U + \frac{n^2 a}{V}} + \frac{nR}{V - nb}\right) dV$ .

b) On identifie terme à terme avec  $dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV$ .

$\frac{C_V}{U + \frac{n^2 a}{V}} = \frac{1}{T}$  d'où  $U = C_V T - \frac{n^2 a}{V}$  : l'énergie interne dépend non seulement de  $T$ , mais aussi de  $V$ .

Et  $\frac{-C_V \frac{n^2 a}{V^2}}{U + \frac{n^2 a}{V}} + \frac{nR}{V - nb} = \frac{P}{T}$ , soit en éliminant  $U$  :  $-\frac{n^2 a}{V^2 T} + \frac{nR}{V - nb} = \frac{P}{T}$  que l'on met sous la forme classique  $\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$

(équation d'état de Van der Waals).

Par rapport au modèle du gaz parfait, on a donc ajouté deux corrections : le terme  $\frac{n^2 a}{V^2}$  dans l'équation d'état, de même que  $-\frac{n^2 a}{V}$  dans l'énergie, correspond aux interactions attractives entre molécules (que l'on a négligées dans le modèle du gaz parfait) ; le terme  $nb$  dans l'équation d'état correspond au volume propre des molécules (lui aussi négligé dans le modèle du gaz parfait).

c) Appliquons le premier principe à la quantité  $n$  de gaz entre l'état initial et l'état final :  $\Delta U + \Delta E_c = Q + W$ . Or  $\Delta E_c = 0$  (gaz immobile au début et à la fin),  $Q = 0$  (le gaz est au contact de parois calorifugées et du vide) ;  $W = 0$  (le gaz est en contact de parois rigides d'un côté, et rencontre le vide de l'autre côté, soit  $P_{\text{ext}} = 0$ ). La détente de Joule & Gay-Lussac vérifie donc  $\Delta U = 0$  (elle est isoénergétique). Ce raisonnement ne fait pas intervenir la nature du gaz (parfait ou non, nature chimique quelconque).

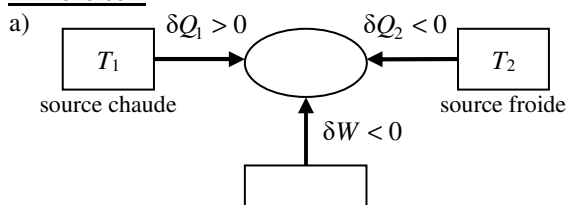
d) D'après la question b, cela équivaut à  $C_V \Delta T - \frac{n^2 a}{2V_1} + \frac{n^2 a}{V_1} = 0$  d'où  $\Delta T = -\frac{n^2 a}{2C_V V_1} = -\frac{na}{2C_{V,m} V_1}$ . AN  $\Delta T = -1,3 \text{ K}$ .

$\Delta S = C_V \ln\left(U_2 + \frac{n^2 a}{2V_1}\right) + nR \ln(2V_1 - nb) - C_V \ln\left(U_1 + \frac{n^2 a}{V_1}\right) + nR \ln(V_1 - nb)$  soit  $\Delta S = nC_{V,m} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{2V_1 - nb}{V_1 - nb}\right)$ .

AN  $\Delta S = +5,67 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . On trouve bien  $\Delta S > 0$  car la détente est adiabatique et irréversible.

Pour un gaz parfait,  $U$  ne dépend que de  $T$  donc on trouverait  $\Delta T = 0$  ; et  $S = C_V \ln T + nR \ln V + \text{cte}$  donc  $\Delta S = nR \ln 2 = +5,76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Exercice 4



Premier principe sur un cycle :  $\delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$  [1].

Second principe sur un cycle (réversible) :  $\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0$  [2].

b) Lorsque le moteur fonctionne, la source chaude se refroidit progressivement ( $T_1$  diminue) tandis que la source froide se réchauffe ( $T_2$  augmente). Le moteur s'arrête lorsque les deux températures deviennent égales (valeur  $T_f$ ) : en effet, on peut alors considérer qu'il n'y a plus qu'une seule source de chaleur, et un moteur monotherme ne peut pas exister (voir cours de PCSI).

Pour étudier l'évolution des températures des sources, on leur applique le premier principe. Pour la source chaude :  $dU_1 = \delta Q_{\text{moteur} \rightarrow \text{source}}$  soit  $C dT_1 = -\delta Q_1$ . De même pour la source froide :  $C dT_2 = -\delta Q_2$ . On remplace alors  $\delta Q_1$  et  $\delta Q_2$  dans l'équation [2] :  $-\frac{C dT_1}{T_1} - \frac{C dT_2}{T_2} = 0$  soit  $\frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2}$ . Enfin on intègre entre l'état initial et l'état final :  $\int_{T_{1i}}^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} = -\int_{T_{2i}}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} \Leftrightarrow \ln \frac{T_f}{T_{1i}} = -\ln \frac{T_f}{T_{2i}}$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{T_f^2}{T_{1i} T_{2i}} = 0 \Leftrightarrow \frac{T_f^2}{T_{1i} T_{2i}} = 1 \text{ soit finalement } \boxed{T_f = \sqrt{T_{1i} T_{2i}}}$$

c) On intègre  $\delta W = -\delta Q_1 - \delta Q_2 = C dT_1 + C dT_2$  entre l'état initial et l'arrêt du moteur :  $W = C \int_{T_{1i}}^{T_f} dT_1 + C \int_{T_{2i}}^{T_f} dT_2 = C(2T_f - T_{1i} - T_{2i})$ . En

remplaçant  $T_f$  par sa valeur, on obtient  $W = C(2\sqrt{T_{1i} T_{2i}} - T_{1i} - T_{2i})$  soit  $\boxed{W = -C(\sqrt{T_{1i}} - \sqrt{T_{2i}})^2}$ . On a bien trouvé  $\boxed{W < 0}$ .

d) Le rendement du moteur est défini par  $\eta = \frac{-W}{Q_1}$ . Or  $Q_1 = -C \int_{T_{1i}}^{T_f} dT_1 = C(T_f - T_{1i})$  soit  $Q_1 = C(\sqrt{T_{1i} T_{2i}} - T_{1i})$ . On trouve donc :

$$\eta = -\frac{(\sqrt{T_{1i}} - \sqrt{T_{2i}})^2}{\sqrt{T_{1i} T_{2i}} - T_{1i}} = \frac{\sqrt{T_{1i}} - \sqrt{T_{2i}}}{\sqrt{T_{1i}}} \text{ soit } \boxed{\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_{2i}}{T_{1i}}}}$$

AN  $\boxed{\eta = 13\%}$ . Si on avait maintenu les températures des sources à leur valeur initiale, on aurait obtenu le rendement de Carnot  $\boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_{2i}}{T_{1i}}}$ . AN  $\boxed{\eta_C = 24\%}$ . On peut vérifier comme attendu que  $\boxed{\eta < \eta_C}$ .

### Exercice 5

a) Sur le diagramme ( $t, s$ ) on peut d'abord placer  $C$  sur l'isobare  $P_2 = 100$  bar, à l'ordonnée  $t_0 = 500$  °C. Ensuite ( $CD$ ) est adiabatique réversible donc isentropique :  $D$  est à la verticale de  $C$ , sur l'isobare  $P_1 = 0,2$  bar que l'on doit prolonger sous la courbe de saturation (palier horizontal).  $A$  est à l'extrémité gauche de ce palier isobare, sur la courbe d'ébullition.  $B$  est à la verticale au-dessus de  $A$ , sur l'isobare  $P_2 = 100$  bar ; or les isobares sont très serrées dans la partie liquide, donc  $B$  est pratiquement confondu avec  $A$  sur ce diagramme. De  $B$  à  $C$ , on suit l'isobare  $P_2 = 100$  bar (donc la partie sous la courbe de saturation est horizontale).

Sur le diagramme ( $P, h$ ), les deux isobares  $BC$  et  $DA$  sont horizontales.  $B$  est donc très au-dessus de  $A$ , et légèrement à sa droite (l'enthalpie augmente un peu puisque le fluide reçoit du travail, mais les isentropes sont presque verticales dans cette zone). Et pour l'isentropique  $CD$ , on suit une courbe isentropique qui passe de la zone vapeur à la zone diphasée.

b) En  $C$  l'eau est sous forme de vapeur sèche (zone à droite de la courbe de saturation). L'ordonnée de  $A$  est  $\boxed{t_A = 60$  °C} (correspondant au palier isobare  $P_1$ ). Au point  $D$  :  $s_D = x_D s_{\text{vap}} + (1 - x_D) s_{\text{liq}}$  d'où  $x_D = \frac{s_D - s_{\text{liq}}}{s_{\text{vap}} - s_{\text{liq}}}$ . AN  $x_D = \frac{6,6 - 0,8}{7,9 - 0,8}$  soit  $\boxed{x_D = 0,82}$ .

c) Par interpolation entre les courbes isenthalpiques :  $\boxed{h_A = 280 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} = h_B}$  ;  $\boxed{h_C = 3370 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$  ;  $\boxed{h_D = 2190 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$ .

d) ( $BC$ ) et ( $DA$ ) sont isobares (et sans travail utile) : le premier principe s'écrit alors  $h_C - h_B = q_{BC}$  et  $h_A - h_D = q_{DA}$ .

AN  $\boxed{q_{BC} = +3090 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$  (effectivement reçu par le fluide) et  $\boxed{q_{DA} = -1910 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$  (fourni par le fluide à l'eau froide du condenseur).

e) Premier principe pour une unité de masse de fluide sur un cycle :  $\Delta h = 0 = q_{BC} + q_{DA} + w$  [puisque ( $AB$ ) et ( $CD$ ) sont adiabatiques] donc  $\boxed{w = -q_{BC} - q_{DA}}$ . AN  $\boxed{w = -1180 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$ . Rendement :  $\boxed{\eta = -\frac{w}{q_{BC}} = 1 + \frac{q_{DA}}{q_{BC}}}$ . AN  $\boxed{\eta = 0,38}$ .

f) La puissance mécanique fournie est  $\mathcal{P} = d \times |w|$  (la puissance est toujours exprimée sans le signe -) donc  $\boxed{d = \frac{\mathcal{P}}{|w|}}$ . AN  $\boxed{d = 210 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$ .