Th2 – Corrigé des exercices 3 et 4

¤ Exercice 3

a) Loi de Fick : $\overrightarrow{j_N}(M,t) = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n^*(r,t) = -D\dfrac{\partial n^*}{\partial r}\overrightarrow{e_r}$ soit $\boxed{j_{N,r}(r,t) = -D\dfrac{\partial n^*}{\partial r}}$.

b) Bilan du nombres de molécules d'eau sur une coquille cylindrique de hauteur h comprise entre r et $r+\mathrm{d}r$ (donc de volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi rh\,\mathrm{d}r$) : $\mathrm{d}N(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}N(t) = +\delta N_{\text{entrant en } r} - \delta N_{\text{sortant en } r+\mathrm{d}r}$

soit $[n^*(r,t+\mathrm{d}t) - n^*(r,t)]\mathrm{d}\tau = \left(+\iint_{S_r} j_{N,r}(r,t)\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s - \iint_{S_{r+\mathrm{d}r}} j_{N,r}(r+\mathrm{d}r,t)\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$

$[n^*(r,t+\mathrm{d}t) - n^*(r,t)]2\pi rh\mathrm{d}r = \left(+j_{N,r}(r,t)2\pi hr - j_{N,r}(r+\mathrm{d}r,t)2\pi h(r+\mathrm{d}r)\right)\mathrm{d}t$.

En divisant par $2\pi h\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$ on obtient : $\dfrac{n^*(r,t+\mathrm{d}t) - n^*(r,t)}{\mathrm{d}t}r = \dfrac{+rj_{N,r}(r,t) - (r+\mathrm{d}r)j_{N,r}(r+\mathrm{d}r,t)}{\mathrm{d}r}$ soit $\boxed{\dfrac{\partial n^*(r,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left[rj_{N,r}(r,t)\right]}{\partial r}}$.

c) On injecte $j_{N,r}$, d'où : $\boxed{\dfrac{\partial n^*(r,t)}{\partial t} = +\dfrac{D}{r}\dfrac{\partial\left[r\frac{\partial n^*}{\partial r}\right]}{\partial r}}$.

d) En régime stationnaire : $\dfrac{\partial n^*}{\partial t} = 0$ d'où $\dfrac{D}{r}\dfrac{\mathrm{d}\left[r\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}\right]}{\mathrm{d}r} = 0$, ce qui donne $\dfrac{\mathrm{d}\left[r\frac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r}\right]}{\mathrm{d}r} = 0$ puisque $D \neq 0$.

On intègre une fois par rapport à r : $r\dfrac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r} = A = \text{cte}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}n^*}{\mathrm{d}r} = \dfrac{A}{r}$. On intègre une deuxième fois : $n^*(r) = A\ln r + B$.

Or la concentration ne peut pas diverger en $r = 0$ (sur l'axe du cylindre), donc nécessairement $A = 0$. Il reste $\boxed{n^*(r) = B = \text{cte}}$.

Si on arrête de cuire un peu avant, la concentration est encore hétérogène, forcément moins grande sur l'axe (puisque la diffusion provient de l'extérieur) ; ainsi le spaghetti est plus moelleux à la surface et plus dur au milieu.

e) On utilise la relation en ordre de grandeur $D \sim \dfrac{\ell^2}{\tau}$ avec $\ell \sim 1$ mm (rayon) et $\tau \sim 12$ min $= 720$ s d'où $\boxed{D \sim 1\cdot 10^{-9}\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}}$.

C'est un ordre de grandeur réaliste pour la diffusion dans un solide poreux et à température assez élevée.

¤ Exercice 4

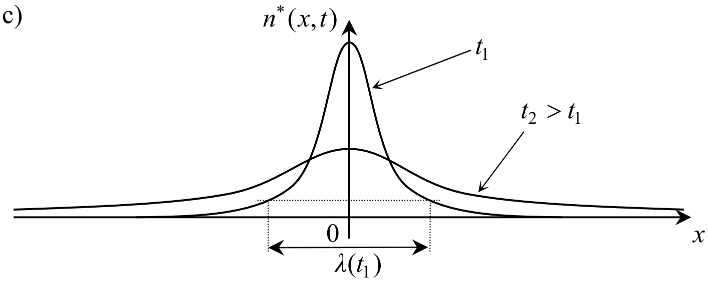
a) Équation de diffusion en l'absence de création/consommation : $\boxed{\dfrac{\partial n^*}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}}$.

b) On trouve bien pour les limites : $\boxed{n^*(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0, \forall x \neq 0}$, $\boxed{n^*(0,t) \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty}$ et $\boxed{n^*(x,t) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0, \forall t}$.

Dérivons cette fonction : $\dfrac{\partial n^*}{\partial t} = -\dfrac{A}{2t^{3/2}\sqrt{D}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right) + \dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{x^2}{4Dt^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$; $\dfrac{\partial n^*}{\partial x} = -\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{2x}{4Dt}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$

puis $\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} = -\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\dfrac{2}{4Dt}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right) + \dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\left(\dfrac{2x}{4Dt}\right)^2\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)$. On vérifie donc bien l'équation de diffusion.

c)



La fonction est de plus en plus « étalée », avec un maximum central de moins en moins élevé. L'aire sous la courbe reste constante, car elle est proportionnelle au nombre total de particules (voir question suivante).

d) Population totale : $N = \iiint_{\text{feuille}} n^*(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2leA\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4Dt}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{Dt}} = 2leA\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u = 2leA\sqrt{\pi}$ donc $\boxed{A = \dfrac{N}{2le\sqrt{\pi}}}$.

e) $n^*\left(\dfrac{\lambda(t)}{2},t\right) = \dfrac{n^*(0,t)}{10} \Leftrightarrow \dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\exp\left(-\dfrac{\lambda(t)^2}{16Dt}\right) = \dfrac{A}{10\sqrt{Dt}} \Leftrightarrow \exp\left(-\dfrac{\lambda(t)^2}{16Dt}\right) = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \boxed{\lambda(t) = 4\sqrt{Dt\ln 10}}$. Comme on l'attendait, la largeur de la tache augmente <u>proportionnellement à la racine carrée de la durée</u> (et à celle du coefficient de diffusion).