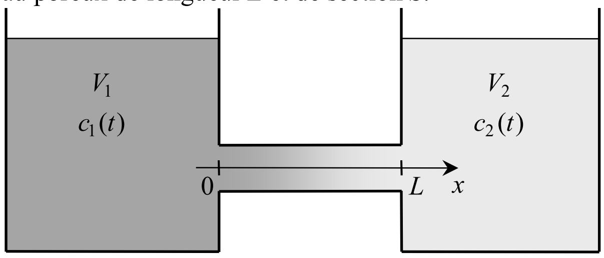
Exercices du chapitre Th2

Bilans et solutions stationnaires

1. Régime quasi stationnaire sans création/absorption

Deux récipients de volumes V_1 et V_2 communiquent par un tuyau poreux de longueur L et de section S.



Une solution moléculaire se trouve de part et d'autre, aux concentrations molaires respectives $c_1(t)$ et $c_2(t)$; chacune de ces concentrations est supposée uniforme dans tout le volume du récipient correspondant, et elles vérifient $c_1(t) > c_2(t)$.

Selon l'axe (Ox) s'établit dans le tuyau un flux de molécules dont la densité molaire j_n est donnée par la loi de Fick (sous forme molaire) avec un coefficient D.

a) Effectuer un bilan et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration $c(x,t)$ dans le tuyau.

b) Quel temps caractéristique T peut-on associer à la diffusion dans le tuyau ?

On suppose maintenant que l'évolution des concentrations dans les deux récipients se fait sur une durée caractéristique τ très grande devant T : ainsi, on peut faire l'approximation d'un régime stationnaire de diffusion.

c) Montrer alors que dans le tuyau, la concentration est une fonction affine de x, et en déduire que la densité de courant molaire j_n est proportionnelle à $\Delta c = c_1 - c_2$.

d) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\Delta c(t)$.

e) Intégrer cette équation en introduisant un temps de relaxation τ que l'on précisera.

2. Diffusion de neutrons dans l'uranium fissile

On étudie un barreau d'uranium d'axe (Ox), de section S et de longueur L, dans lequel la densité volumique de neutrons est notée $n^*(x,t)$; leur coefficient de diffusion est D. Un neutron peut être absorbé par un noyau d'uranium et provoquer sa fission, qui produit à son tour un nombre moyen K de neutrons (K est de l'ordre de 2 à 3). Le nombre de neutrons absorbés par unité de volume pendant dt s'écrit : $\delta n^*_{\text{abs}} = \dfrac{n^*(x,t)}{\tau}\mathrm{d}t$ où τ est un temps caractéristique.

a) Effectuer un bilan et en déduire l'équation de diffusion.

b) On s'intéresse uniquement au régime stationnaire (que l'on essaie de maintenir dans une centrale nucléaire). Déterminer dans ce cas la solution $n^*(x)$ à une constante multiplicative près, sachant que la concentration reste nulle aux deux extrémités. Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière de la longueur du barreau.

3. Diffusion de l'eau dans un spaghetti

Un spaghetti est constitué de semoule de blé dur ; lors de sa cuisson dans l'eau, les molécules d'eau diffusent à l'intérieur. La géométrie du spaghetti est celle d'un long cylindre mince d'axe (Oz), de rayon R et de longueur $L \gg R$, et les molécules d'eau entrent essentiellement par la surface latérale (et très peu par les extrémités) ; on peut alors considérer une situation de symétrie cylindrique : la concentration particulaire de l'eau $n^*(r,t)$ ne dépend que de la distance r à l'axe et du temps.

a) En déduire que le vecteur densité de flux d'eau est de la forme $\overrightarrow{j_N}(M,t) = j_{N,r}(r,t)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées cylindriques.

Il n'y a pas de processus de production ni de consommation de l'eau dans le spaghetti.

b) Faire un bilan sur une coquille cylindrique comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$ et en déduire une équation aux dérivées partielles.

c) En utilisant la loi de Fick, en déduire l'équation de diffusion. On supposera que le coefficient de diffusion D de l'eau dans le blé est une constante (ce qui est une grosse approximation pour de fortes concentrations).

d) Lorsque les pâtes sont cuites, on arrive à un régime stationnaire. Montrer que la concentration en eau est alors nécessairement uniforme dans le spaghetti. Qu'en est-il pour une cuisson *al dente*, c'est-à-dire arrêtée un peu avant d'arriver au régime stationnaire ?

e) La marque De Cecco indique pour son Spaghetti nº 12 :

« Sa forme originale est allongée et ronde avec un diamètre pouvant varier de 1,92 à 2 mm.
Temps de cuisson : al dente 10 minutes ; normal 12 minutes. »

Évaluer le coefficient de diffusion D de l'eau dans la semoule de blé dur, à la température de 100 °C.

Solution de l'équation de diffusion en régime variable

4. Élargissement d'une tache d'encre

Un trait d'encre très fin est tracé sur une feuille de papier : il s'élargit progressivement sous l'effet de la diffusion. On étudie cette situation de manière simplifiée en se plaçant dans un modèle unidimensionnel : la concentration des particules de l'encre ne dépend que de l'abscisse x et de l'instant t. La feuille a une épaisseur e selon l'axe (Oz), une largeur l selon l'axe (Oy), et une longueur infinie selon l'axe (Ox).

Le nombre total de particules d'encre est noté N. À l'instant initial, elles sont supposées infiniment concentrées en $x = 0$, sur la largeur l et l'épaisseur e de la feuille, et leur concentration est nulle partout ailleurs. À un instant quelconque, les conditions aux limites sont : $n^*(+\infty,t) = n^*(-\infty,t) = 0$ car l'encre progresse à vitesse finie.

a) Rappeler sans démonstration l'équation de diffusion unidimensionnelle, dans un milieu sans processus de création ou destruction de particules.

b) Vérifier que la fonction suivante est solution de l'équation de diffusion, et qu'elle respecte également les conditions initiales et aux limites :

$$n^*(x,t) = \frac{A}{\sqrt{D\,t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4D\,t}\right).$$

c) Représenter graphiquement cette concentration en fonction de x à deux instants t différents.

d) Déterminer la constante A en fonction de N, l et e.

e) On définit la largeur $\lambda(t)$ de la tache à un instant t par :

$$n^*\left(\frac{\lambda(t)}{2},t\right) = \frac{n^*(0,t)}{10}.$$

Calculer $\lambda(t)$ et commenter le résultat.

Donnée pour cet exercice : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u^2)\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

☞ *Réponses partielles*

2. a) $\dfrac{\partial n^*}{\partial t}(x,t) = D\dfrac{\partial^2 n^*}{\partial x^2}(x,t) + \dfrac{K-1}{\tau}n^*(x,t)$.

3. d) La solution générale en régime stationnaire est de la forme $n^*(r) = A\ln(r) + B$.

4. d) $A = \dfrac{N}{2le\sqrt{\pi}}$. e) $\lambda(t) = 4\sqrt{D\,t\ln 10}$.

Th2. Diffusion de particules

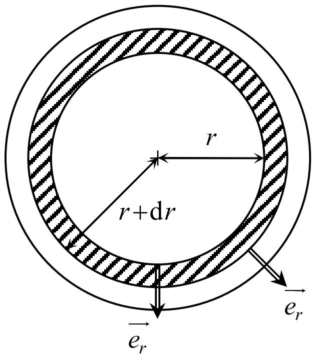
Compléments

1. Bilan de particules

c) Établissement d'un bilan de particules

● Cas d'une symétrie sphérique

On suppose $n^*(r,t)$ et $\overrightarrow{j_N}(M,t) = j_{N,r}(r,t)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques : ces grandeurs sont indépendantes des angles θ et φ, il y a invariance par toute rotation autour de l'origine O.



Bilan de particules dans une coquille sphérique comprise entre r et $r+\mathrm{d}r$, entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}N(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}N(t) = +\delta N_{\text{entrant en } r} - \delta N_{\text{sortant en } r+\mathrm{d}r} + \delta N_{\text{app-disp}}$$

soit $[n^*(r,t+\mathrm{d}t) - n^*(r,t)]\mathrm{d}\tau = \left(+ \iint_{S_r} j_{N,r}(r,t)\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s - \iint_{S_{r+\mathrm{d}r}} j_{N,r}(r+\mathrm{d}r,t)\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\,\mathrm{d}s \right)\mathrm{d}t + a(r,t)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$

Le volume de la coquille sphérique est $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$, et les flux se simplifient en produits de $j_{N,r}$ par la surface, d'où :

$$[n^*(r,t+\mathrm{d}t) - n^*(r,t)]4\pi r^2 \mathrm{d}r = \left(+ j_{Nr}(r,t)4\pi r^2 - j_{Nr}(r+\mathrm{d}r,t)4\pi(r+\mathrm{d}r)^2 \right)\mathrm{d}t + a(r,t)\,4\pi r^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\,.$$

On divisant par $4\pi \mathrm{d}r\,\mathrm{d}t$ on obtient :

$$\frac{n^*(r,t+\mathrm{d}t) - n^*(r,t)}{\mathrm{d}t} r^2 = \frac{+r^2 j_{Nr}(r,t) - (r+\mathrm{d}r)^2 j_{Nr}(r+\mathrm{d}r,t)}{\mathrm{d}r} + a(r,t)\,r^2$$

soit $\dfrac{\partial n^*(r,t)}{\partial t} r^2 = -\dfrac{\partial\left[r^2 j_{N,r}(r,t)\right]}{\partial r} + a(r,t)\,r^2$ et finalement $\boxed{\dfrac{\partial n^*(r,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial\left[r^2 j_{N,r}(r,t)\right]}{\partial r} + a(r,t)}$.

2. Équation de diffusion

a) Loi de Fick

● Valeurs du coefficient de diffusion

Milieu	Particules	Coefficient D ($\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$)
air N_2/O_2 (à 298 K)	molécules H_2O	$2{,}8\cdot 10^{-5}$
	molécules CO_2	$1{,}6\cdot 10^{-5}$
eau H_2O liquide (à 298 K)	ions Na^+	$1{,}9\cdot 10^{-9}$
	molécules CO_2	$1{,}9\cdot 10^{-9}$
	molécules d'éthanol C_2H_5OH	$0{,}84\cdot 10^{-9}$
	molécules de glucose $C_6H_{12}O_6$	$0{,}67\cdot 10^{-9}$
	molécules d'ADN	$1{,}3\cdot 10^{-12}$
éthanol C_2H_5OH liquide	molécules H_2O	$1{,}2\cdot 10^{-9}$
silicium Si solide (à 1300 K)	atomes d'arsenic As	$8\cdot 10^{-20}$
silicium Si solide (à 298 K)	atomes d'arsenic As	$2\cdot 10^{-30}$
cuivre Cu solide (à 298 K)	atomes d'aluminium Al	$1{,}3\cdot 10^{-30}$