Exercices du chapitre Th3

Bilans et solutions stationnaires

1. Fusible

Un fusible est constitué d'un fil conducteur cylindrique homogène, de section S, de longueur L, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, de température de fusion T_f, de conductivité thermique λ et de conductivité électrique σ. Il est parcouru par un courant d'intensité constante I. La formule reliant la résistance à la conductivité et à la géométrie du conducteur est la même pour la conduction thermique et pour la conduction électrique.

Le fil est entouré d'un étui cylindrique aux parois latérales adiabatiques. Les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température T_0 du reste du circuit.

a) Établir soigneusement l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x,t)$ dans le fil.

b) On se place en régime stationnaire. Déterminer la fonction $T(x)$ et tracer sa représentation graphique.

c) On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 16$ A. Préciser en quel point a lieu la fusion du fil en cas de dépassement, et calculer la section S. Faire l'application numérique avec les valeurs suivantes, en unités SI : $\lambda = 65$ SI ; $\sigma = 1{,}2\cdot10^6$ SI ; $c = 460$ SI ; $\rho = 2{,}7\cdot10^3$ SI ; $T_0 = 290$ K ; $T_f = 390$ K ; $L = 2{,}5$ cm.

d) Le fil ayant la section S calculée ci-dessus, on fixe $I = 10$ A. Calculer, littéralement puis numériquement, les puissances thermiques $\mathcal{P}_{th}(0)$ et $\mathcal{P}_{th}(L)$ transférées en $x = 0$ et $x = L$, et préciser pour chacune si elle est reçue ou fournie par le fil.

e) Quelle relation lie $\mathcal{P}_{th}(0)$, $\mathcal{P}_{th}(L)$ et la puissance $\mathcal{P}_{élec}$ reçue par le fil ? Interpréter.

2. Température cutanée d'un mammifère

La température T_c à la surface de la peau d'un mammifère est égale à la température que prend le fluide qui l'entoure (air ou eau) à son contact. Pour faire un calcul simple d'ordre de grandeur, on modélise le mammifère par une boule de centre O et de rayon R, dont le métabolisme dégage une puissance thermique par unité de volume p_v, uniforme dans tout son volume. Le fluide extérieur a une conductivité thermique λ ; sa température loin de l'animal est $T_0 = 293$ K. On étudie la température de ce fluide en tout point *extérieur* à l'animal (donc dans le domaine $r \geq R$ en coordonnées sphériques) : elle est de la forme $T(r,t)$, et le vecteur densité de flux est $\overrightarrow{j_Q}(M,t) = j_{Qr}(r,t)\overrightarrow{e_r}$.

a) En effectuant un bilan sur un système à définir, établir l'équation différentielle reliant $T(r,t)$ et $j_{Qr}(r,t)$.

b) On se place en régime permanent. Que devient l'équation précédente ? En déduire $\overrightarrow{j_Q}(M)$ en fonction de p_v, r et R.

c) Déterminer la température $T(r)$.

d) Quelle est la température cutanée T_c de l'animal ? Commenter sa variation en fonction de λ (à R fixé), puis en fonction de R (à λ fixé).

e) Pour $R = 25$ cm (ce qui donne un rapport surface/volume proche de celui de l'être humain), calculer la valeur de p_v pour avoir $T_c = 303$ K, dans l'air puis dans l'eau. On donne : $\lambda = 500\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pour l'eau et $\lambda = 5\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pour l'air (valeurs corrigées pour tenir compte de la convection).

Pourquoi n'existe-t-il pas de petit mammifère marin ?

Résistance thermique

3. Simple ou double vitrage

On considère une pièce à la température $\theta_{int} = 20$ °C ; la température extérieure est $\theta_{ext} = 5$ °C. Les transferts thermiques entre la pièce et l'extérieur se font à travers une vitre carrée de côté $a = 60$ cm, d'épaisseur $e = 3{,}0$ mm, constituée d'un verre de conductivité thermique $\lambda = 1{,}15\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$; on néglige les flux à travers les autres parois de la pièce (murs très épais). On se place en régime stationnaire.

a) Définir et calculer la résistance thermique de la vitre. En déduire le flux thermique sortant de la pièce.

b) Que deviendrait ce flux si on collait deux vitres identiques l'une contre l'autre (sans air entre les deux) ?

On remplace maintenant ce simple vitrage par un double vitrage, constitué de deux vitres identiques à la précédente séparées par une couche d'air de conductivité thermique $\lambda' = 0{,}025\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, d'épaisseur $e' = 10$ mm.

c) Déterminer la nouvelle valeur du flux thermique.

d) Calculer les températures sur les deux interfaces verre/air à l'intérieur du double vitrage.

Solution de l'équation de diffusion en régime variable

4. Variations de température du sol

Les variations de température de l'air, au cours d'une journée, entraînent des variations de température dans le sol, qui dépendent de la profondeur.

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$, et le sol le demi-espace $x > 0$: la coordonnée x représente donc la *profondeur*. La température de l'air et du sol en $x = 0$ est de la forme $T(0,t) = T_0 + a\cos(\omega t)$. Pour faciliter les calculs, on utilisera la notation complexe : $\underline{T}(0,t) = T_0 + a\exp(j\omega t)$.

La masse volumique du sol est $\rho = 3{,}0\cdot10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, sa conductivité thermique est $\lambda = 1{,}2\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et sa capacité thermique $c = 515\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. On posera $\delta = \sqrt{\dfrac{2\lambda}{\rho c\omega}}$, et on rappelle que $(1+j)^2 = 2j$.

a) Établir l'équation de diffusion thermique dans le sol.

b) On cherche une solution complexe de la forme :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{b}(x)\exp(j\omega t).$$

Déterminer l'amplitude complexe $\underline{b}(x)$.

c) En déduire l'expression de la température réelle $T(x,t)$.

d) En hiver, on suppose que la variation journalière de température en $x = 0$ est d'amplitude 15 °C autour d'une valeur moyenne de 3 °C. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm : le sol gèle-t-il à cette profondeur ?

☞ *Réponses partielles*

1. a) $\rho c\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \dfrac{I^2}{\sigma S^2}$. b) $T(x) = T_0 + \dfrac{I^2L^2}{2\sigma\lambda S^2}\left(\dfrac{x}{L} - \dfrac{x^2}{L^2}\right)$. **2.** a) $\rho c\dfrac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 j_{Qr}(r,t))}{\partial r}$.

c) $T(r) = T_0 + \dfrac{p_v R^3}{3\lambda r}$. **3.** a) $R_{th} = \dfrac{e}{a^2\lambda} = 7{,}2\cdot10^{-3}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$, $\mathcal{P}_{th} = 2{,}0$ kW. **4.** b). $\underline{b}(x) = a\exp\left(-(1+j)\dfrac{x}{\delta}\right)$.

Th3. Diffusion et rayonnement thermiques

Complément

2. Équation de diffusion

a) Loi de Fourier

● Valeurs de la conductivité thermique

	Matériau	λ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$) à 20 °C
Gaz	air (10^5 Pa)*	0,025
	argon (10^5 Pa)	0,017
	krypton (10^5 Pa)	0,009
	vide usuel (air 10^{-2} Pa)	0,0003
Liquides	eau*	0,60
	éthanol	0,17
	huiles	0,1 à 0,2
	mercure	8,25

	Matériau	λ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$) à 20 °C
Solides	polystyrène expansé	0,004
	polystyrène	1,1
	bois	0,15 à 0,25
	béton*	0,92
	verres	0 9 à 1,2
	acier*	50
	cuivre	390
	argent	420