

**Corrigé du devoir test de physique n° 1****▣ Problème 1**

A. Loi de Fick :  $j_N = -D \frac{\partial n^*}{\partial x}$  dans le cas présent, ou plus généralement  $\overline{j_N} = -D \overline{\text{grad}(n^*)}$ .

$\dim(j_N) = L^{-2} \cdot T^{-1}$ ,  $\dim(n^*) = L^{-3}$ ,  $\dim(x) = L$  donc  $\dim(D) = L^2 \cdot T^{-1}$ .

B. Le nombre de particules dans un cylindre, entre deux abscisses quelconques  $x$  et  $x'$ , est constant en régime permanent (stationnaire) : le flux entrant est donc égal au flux sortant, soit  $j_N(x)S = j_N(x')S$ , c'est-à-dire que  $j_N$  est uniforme le long du

barreau. Alors d'après la loi de Fick :  $\frac{dn^*}{dx} = -\frac{j_N}{D} = \text{cte}$  donc  $n^*(x) = -\frac{j_N}{D}x + A$ . Conditions aux limites :  $n^*(0) = n_0^* = A$  et

$n^*(L) = n_L^* = -\frac{j_N}{D}L + n_0^*$  donc  $j_N = D \frac{n_0^* - n_L^*}{L}$ .

C.1. Bilan du nombre de neutrons dans une tranche entre  $x$  et  $x+dx$ , entre les instants  $t$  et  $t+dt$  :

$$dN(t+dt) - dN(t) = +\delta N_{\text{entrant}, x} - \delta N_{\text{sortant}, x+dx} - \delta N_{\text{absorbés}}$$

soit  $[n^*(x, t+dt) - n^*(x, t)]S dx = + \left( \iint_S j_N(x, t) \overline{e_x} \cdot \overline{e_x} ds \right) dt - \left( \iint_S j_N(x+dx, t) \overline{e_x} \cdot \overline{e_x} ds \right) dt - aS dx dt$  d'où en divisant par  $S dx dt$  :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = -\frac{\partial j_N}{\partial x} - a. \text{ Avec } j_N = -D \frac{\partial n^*}{\partial x} \text{ on obtient : } \frac{\partial n^*}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n^*}{\partial x^2} - a.$$

C.2. En régime stationnaire,  $\frac{\partial n^*}{\partial t} = 0$  donc  $\frac{d^2 n^*}{dx^2} = \frac{a}{D} = \text{cte}$ . On en déduit  $\frac{dn^*}{dx} = \frac{a}{D}x + B$  d'où  $j_N = -ax + C$ . Avec la condition

$j_N(0) = j_{N0} = C$  on obtient finalement :  $j_N = j_{N0} - ax$ .

C.3. Ce flux s'annule en  $L' = \frac{j_{N0}}{a}$ . En effet, le nombre de neutrons absorbés dans un cylindre de longueur  $L'$  étant  $aL'S$ , pour qu'il soit égal au nombre de neutrons  $j_{N0}S$  introduits en  $x=0$ , faut que  $aL' = j_{N0}$ .

C.4. Il est irréaliste de considérer que le nombre de neutrons absorbés est le même partout, quelle que soit la concentration : il est forcément plus grand lorsque la concentration est plus grande. Plus précisément, la probabilité d'absorption d'un neutron est proportionnelle au nombre de neutrons présents, donc on doit remplacer  $a$  par un produit  $\gamma n^*(x)$ . L'équation différentielle en régime

stationnaire est alors de la forme  $\frac{d^2 n^*}{dx^2} = \frac{\gamma}{D} n^*(x)$ , dont les solutions sont de la forme  $n^*(x) = E \exp(-x\sqrt{\gamma/D}) + F \exp(+x\sqrt{\gamma/D})$

d'où  $j_N(x) = G \exp(-x\sqrt{\gamma/D}) + H \exp(+x\sqrt{\gamma/D})$ .

D.1. La fission nucléaire est un processus naturel au cours duquel un noyau lourd, sous l'effet du choc d'un neutron, se casse en deux noyaux plus légers et deux ou trois neutrons.

D.2. Lors de la fission, une partie de l'énergie potentielle de liaison des nucléons est transformée en énergie cinétique des fragments créés, puis cette énergie cinétique est transférée aux atomes du milieu par des chocs : cette augmentation de l'énergie cinétique microscopique moyenne correspond à la notion macroscopique d'élévation de température.

D.3. On injecte la solution proposée dans l'équation différentielle :  $-\frac{t}{\tau} f(x) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = D \frac{d^2 f}{dx^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \beta f(x) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  soit

après simplification par l'exponentielle (non nulle) et regroupement des termes :  $\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\beta + 1/\tau}{D} f(x) = 0$ .

D.4. Si  $\beta + 1/\tau > 0$ , les solutions sont de la forme :  $f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$  en posant  $k = \sqrt{\frac{\beta + 1/\tau}{D}}$ .

Si  $\beta + 1/\tau < 0$ , les solutions sont de la forme :  $f(x) = A \exp(k'x) + B \exp(-k'x)$  (ou bien  $f(x) = E \text{ch}(k'x) + F \text{sh}(k'x)$ ) en posant cette fois  $k' = \sqrt{-\frac{\beta + 1/\tau}{D}}$ . Dans le second cas, l'application des conditions aux limites (CL) donne :  $f(0) = 0 = A + B$  donc  $B = -A$  ;

et  $f(L) = 0 = A \exp(k'L) - A \exp(-k'L)$ , soit  $A = 0$  (pas de neutrons !) ou  $\exp(k'L) = \exp(-k'L)$ , ce qui est impossible pour  $k'L \neq 0$ .

Le seul cas possible est donc la solution sinusoïdale. Alors  $f(0) = 0 = A$  donc  $f(x) = B \sin(kx)$  avec  $k = \sqrt{\frac{\beta + 1/\tau}{D}}$ .

Les données ne permettent pas de trouver la constante  $B$ .

D.5. L'autre CL est :  $f(L) = 0 = B \sin(kL)$  donc  $kL = m\pi$  avec  $m$  entier. Mais  $f(x)$  ne peut pas être négative dans l'intervalle  $[0, L]$ , puisque la concentration est une grandeur positive. Donc  $kL$  est nécessairement la première valeur qui annule le sinus :  $kL = \pi$ , d'où

$L = \frac{\pi}{k}$ . On en déduit la valeur de  $\tau$  avec  $\frac{1}{\tau} = D \frac{\pi^2}{L^2} - \beta$ . On voit alors que  $\frac{1}{\tau}$  devient négatif, donc  $\tau$  aussi, si  $L > \pi \sqrt{\frac{D}{\beta}} = L_0$ .

Dans ce cas,  $n^*$  diverge (tend vers l'infini) au cours du temps, en tout point du barreau, ce qui provoque un échauffement hors de contrôle : il y a donc une explosion nucléaire !

## □ Problème 2

**Q1.** L'étape 1→2 est la compression : cela nécessite que le fluide reçoive effectivement du travail, donc  $w_{12} > 0$ . L'étape 2→3 a lieu dans un condenseur, où le fluide réchauffe la source chaude (tout en passant de l'état gazeux à l'état liquide) : le fluide fournit effectivement le transfert thermique, donc  $q_{23} < 0$ . L'étape 4→1 a lieu dans un évaporateur, où le fluide refroidit la source froide (tout en passant de l'état liquide à l'état gazeux) : le fluide reçoit effectivement le transfert thermique, donc  $q_{41} > 0$ .

**Q2.** Dans le condenseur, pour que le fluide cède de la chaleur à la source chaude il faut que la température du fluide soit supérieure à celle de la source chaude. Dans l'évaporateur, pour que le fluide reçoive de la chaleur de la source froide il faut que la température du fluide soit inférieure à celle de la source froide.

**Q3.** La source froide est constituée de tout ce qui est à l'intérieur du réfrigérateur. La source chaude est constituée de l'air ambiant.

**Q5.** En régime stationnaire, le débit massique du fluide est le même à l'entrée et à la sortie de chaque appareil, donc ce débit  $D_m = \mu S v$  a la même valeur en tout point du cycle. Puisque  $S$  est constante, la vitesse  $v$  est maximale là où la masse volumique  $\mu$  est minimale, donc au point 1.

**Q6.** On lit sur le graphe la variation d'enthalpie massique au cours de la compression 1→2 :  $h_1 = 388 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $h_2 = 440 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  donc  $h_2 - h_1 = 52 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} = 52000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Puisque les variations d'énergie cinétique massique sont au maximum de l'ordre de  $v^2/2 \sim 0,5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ , elles sont négligeables devant les variations d'enthalpie.

**Q7.** Pour un réfrigérateur, on peut estimer les variations maximales d'altitude à  $\Delta z \sim 1 \text{ m}$ , d'où  $\Delta(gz) \sim 10 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ . C'est donc également négligeable par rapport aux variations d'enthalpie massique.

**Q8.** Le point 1 se trouve sur l'isotherme  $-20 \text{ }^\circ\text{C}$ , tandis que l'extrémité droite du palier de changement d'état, à cette pression, se trouve sur l'isotherme  $-30 \text{ }^\circ\text{C}$ . Donc  $T_1 - T_{\text{sat}}(P_{\text{bp}}) = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Q9.** Le point 3 se trouve sur l'isotherme  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ , tandis que l'extrémité gauche du palier de changement d'état, à cette pression, se trouve sur l'isotherme  $40 \text{ }^\circ\text{C}$ . Donc  $T_3 - T_{\text{sat}}(P_{\text{hp}}) = -10 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Q10.** Comme il n'y a pas de pièce mobile, il n'y a pas d'échange de travail utile :  $w_{34} = 0$ . Et les parois étant calorifugées, il n'y a pas non plus de transfert thermique :  $q_{34} = 0$ . L'application du premier principe donne alors  $h_4 - h_3 = 0$  : détente isenthalpique.

**Q11.** (Question bizarre, avec toutes les indications fournies on se demande ce qu'il reste à expliquer...) Du point 3 à la courbe de saturation, on descend verticalement sur l'isotherme  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ , donc  $\Delta T = 0$ , ce qui correspond bien à  $\Delta h = 0$ .

**Q12.** Au cours de cette vaporisation, il y a aussi changement de température : on n'a pas de formule donnant directement la variation d'enthalpie. Mais comme celle-ci est une fonction d'état, on peut imaginer un chemin au cours duquel le fluide passerait d'abord de la température  $T_3$  à  $T_4$ , en restant liquide, puis se vaporiserait partiellement à la température  $T_4$ . La variation d'enthalpie d'une masse  $m$  serait alors la somme des deux variations successives :  $\Delta H = mc_p(T_4 - T_3) + \Delta m_{\text{vap}} L_{\text{vap}}(T_4)$ . En divisant par la masse totale  $m$  on obtient  $\Delta h = c_p(T_4 - T_3) + \Delta x_{\text{vap}} L_{\text{vap}}(T_4)$ .

**Q13.** On lit les valeurs de  $h$  aux extrémités du palier où se trouve le point 4 :  $L_{\text{vap}}(T_4) = 380 - 162 = 218 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  ( $\pm 2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

Puisque  $\Delta h = 0$  sur cette transformation, on en déduit  $T_4 - T_3 = -\frac{\Delta x_{\text{vap}} L_{\text{vap}}(T_4)}{c_p}$ . AN  $T_4 - T_3 = -\frac{0,36 \times 218}{1}$  soit  $T_4 - T_3 = -78 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Or sur le graphe on voit que le point initial de la vaporisation est sur l'isotherme  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ , et le point final sur l'isotherme  $-30 \text{ }^\circ\text{C}$ , ce qui donne  $T_4 - T_3 = -60 \text{ }^\circ\text{C}$ . L'ordre de grandeur est similaire, mais il y a quand même un écart de l'ordre de 20 % entre les deux : cela peut être dû notamment à la valeur trop peu précise de  $c_p$  (un seul chiffre significatif).

**Q14.** Il faut négliger les phénomènes de viscosité, qui font chuter la pression (comme dans la détente de Joule-Thomson).

**Q15.** Il faut supposer que les parois sont parfaitement calorifugées (transformation adiabatique), que le mouvement de l'hélice du compresseur est suffisamment lent et qu'on peut négliger les pertes par viscosité (transformation réversible).

**Q16.** Dans une machine frigorifique, l'énergie massique utile est le transfert thermique avec la source froide, soit ici  $q_{41}$  ; et l'énergie massique coûteuse est le travail utile total reçu sur le cycle, qui comporte ici uniquement le terme  $w_{12}$ . Sur 1→2 :  $q_{12} = 0$  donc  $w_{12} = h_2 - h_1 = 52 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  (déjà évalué). Sur 4→1 :  $w_{41} = 0$  (pas de pièce mobile) donc  $q_{41} = h_1 - h_4 = 388 - 242 = 146 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

L'efficacité est donc  $e = 2,8$ .

**Q17.** Appliquer les deux principes « à 1 kg de fluide » signifie qu'on les écrit avec les grandeurs massiques (lettres minuscules). Premier principe sur un cycle :  $\Delta h = 0 = q_{\text{chaud}} + q_{\text{froid}} + w_{\text{tot}}$  d'où  $w_{\text{tot}} = -q_{\text{chaud}} - q_{\text{froid}}$  et

$e_c = \frac{q_{\text{froid}}}{w_{\text{tot}}} = \frac{q_{\text{froid}}}{-q_{\text{chaud}} - q_{\text{froid}}} = \frac{1}{-q_{\text{chaud}}/q_{\text{froid}} - 1}$ . Second principe sur un cycle :  $\Delta s = 0 = s_{\text{éch}} + s_{\text{créé}} = \frac{q_{\text{chaud}}}{T_{\text{chaud}}} + \frac{q_{\text{froid}}}{T_{\text{froid}}} + 0$  d'où

$-\frac{q_{\text{chaud}}}{q_{\text{froid}}} = \frac{T_{\text{chaud}}}{T_{\text{froid}}}$  et finalement  $e_c = \frac{1}{T_{\text{chaud}}/T_{\text{froid}} - 1} = \frac{T_{\text{froid}}}{T_{\text{chaud}} - T_{\text{froid}}}$ . AN  $e_c = \frac{258}{293 - 258}$  soit  $e_c = 7,4$ . On trouve bien sûr  $e_c > e$

(largement), ce qui était prévisible puisque le cycle réel est loin d'être réversible. Les sources d'irréversibilité de ce cycle modèle sont les différences de température entre le fluide frigorigène et les deux sources lors des phases d'échange thermique, ainsi que la viscosité (frottements fluides) dans le détendeur de Joule-Thomson notamment.

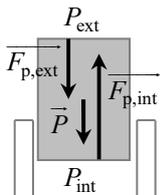
**Q18.** La compression étant irréversible, elle se produit avec une augmentation d'entropie : le point 2 doit donc être placé en réalité plus à droite que sur le graphe donné. Cela correspond à une augmentation de  $h_2 - h_1$ , donc à une augmentation du travail reçu sur le cycle (sans variation du transfert avec la source froide), ce qui entraîne une diminution de l'efficacité de la machine.

**Q19.** Le sous-refroidissement déplace le point 3 vers la gauche, donc le point 4 également. Cela augmente la largeur du palier 4→1, donc le transfert thermique avec la source froide, sans changer le travail à fournir, donc l'efficacité augmente.

### ▣ Problème 3

**Q1.** La masse donnée par la balance est  $m = 39 \pm 1 \text{ g}$ . L'évaluation de l'incertitude-type est de type B : on ne répète pas l'expérience (type A), mais on estime l'incertitude à partir des propriétés de l'appareil et de la procédure.

**Q2.**



**Q3.** Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la soupape :  $\vec{P} + \vec{F}_{p,int} + \vec{F}_{p,ext} = \vec{0}$ . Projection sur la verticale ascendante :  $-mg + P_{int}S - P_{ext}S = 0$  d'où

$$P_{int} = P_{ext} + \frac{mg}{S}. \text{ AN } P_{int} = 1,56 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 156 \text{ kPa} = 1,56 \text{ bar}.$$

**Q4.** L'indication PF (pression de fonctionnement ?) 55 kPa désigne vraisemblablement la surpression dans l'autocuiseur par rapport à une pression atmosphérique de 100 kPa, en fonctionnement normal, ce qui correspond bien à notre calcul. L'indication PS (pression de sécurité ?) 100 kPa désigne probablement la surpression maximale pour un fonctionnement en sécurité, soit 2 bar à l'intérieur.

**Q5.** On lit  $T_i = 20(\pm 1) \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Q6.** On applique le premier principe de la thermodynamique au système {eau, autocuiseur}, entre les instants 0 et  $\Delta t$ , en supposant qu'il échange uniquement un transfert thermique avec la plaque chauffante :  $\Delta U = Q$  soit  $(C_a + m_e c_e)(T_f - T_i) = P_{th} \Delta t$ , d'où une

durée  $\Delta t = \frac{(C_a + m_e c_e)(T_f - T_i)}{P_{th}}$ . AN  $\Delta t = 289 \text{ s} = 4 \text{ min } 49 \text{ s}$ .

**Q7.** Sur la figure 5 on trouve un temps plus long, d'environ 350 à 400 s. En effet, on a négligé les pertes thermiques de l'autocuiseur, qui ont tendance à ralentir l'élévation de température ; on néglige aussi la fraction de l'énergie apportée qui est absorbée par la transition de phase liquide/vapeur, et qui ne contribue donc pas à élever la température ; et on néglige aussi le temps de diffusion de la chaleur à travers tout le volume d'eau et de l'eau à la vapeur.

**Q8.** On applique maintenant le premier principe au même système entre les instants  $t$  et  $t+dt$  :  $dU = \delta Q_{\text{plaque}} + \delta Q_{\text{perte}}$  soit

$$(C_a + m_e c_e) dT = +P_{th} dt - P_f(t) dt = +P_{th} dt - k[T(t) - T_{ext}] dt \text{ d'où en divisant par } dt : (C_a + m_e c_e) \frac{dT}{dt} = +P_{th} - k[T(t) - T_{ext}] \text{ que}$$

l'on peut mettre sous la forme  $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}[T(t) - T_{ext}] = \frac{1}{\tau} \frac{P_{th}}{k}$  en posant  $\tau = \frac{C_a + m_e c_e}{k}$ .

**Q9.** Solution générale :  $T(t) - T_{ext} = \frac{P_{th}}{k} + B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ , soit  $A = T_{ext} + \frac{P_{th}}{k}$ . À  $t = 0$ ,  $T(0) = T_i$  d'où  $B = T_i - T_{ext} - \frac{P_{th}}{k}$ .

**Q10.** On lit la valeur  $\Delta t' = 330 \pm 5 \text{ s}$ . On a bien trouvé  $\Delta t' > \Delta t$ , comme prévu à la question **Q7**, puisque les pertes ralentissent l'élévation de température. Mais cette valeur reste plus faible que la valeur vraiment observée, car il reste les autres effets non pris en compte dans notre modèle.

**Q11.** On lit  $T_p = 111(\pm 1) \text{ }^\circ\text{C}$  et  $P_p = (1,52 \pm 0,01) \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,52(\pm 0,01) \text{ bar}$ .

**Q12.** En régime permanent, il y a un équilibre diphasé entre l'eau liquide et la vapeur d'eau. Or sous une pression donnée (ici imposée par la soupape), l'équilibre diphasé ne peut exister qu'à une seule température : le palier de pression correspond donc à un palier de température.