Th3 – Corrigé des exercices 2, 3 et 4

¤ Exercice 2 (fin)

b) En régime permanent, $-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}(r^2 j_{Qr}(r))}{\mathrm{d}r}=0$ donc $j_{Qr}(r)=\dfrac{A}{r^2}$ (avec A une constante).

La condition aux limites en $r = R$ s'obtient en faisant un bilan d'énergie, entre t et $t+\mathrm{d}t$ par exemple, pour l'animal en régime stationnaire : $0=-\mathcal{P}_{\text{th, fournie}}(R)\,\mathrm{d}t+\mathcal{P}_{\text{métabolisme}}\,\mathrm{d}t$ soit $0=-j_{Qr}(R)4\pi R^2+p_\mathrm{v}\dfrac{4}{3}\pi R^3$ d'où $j_{Qr}(R)=p_\mathrm{v}\dfrac{R}{3}$. On en déduit la constante A : $j_{Qr}(R)=\dfrac{A}{R^2}=p_\mathrm{v}\dfrac{R}{3}$ d'où $A=p_\mathrm{v}\dfrac{R^3}{3}$. Finalement : $j_{Qr}(r)=p_\mathrm{v}\dfrac{R^3}{3r^2}$ et $\boxed{\overrightarrow{j_Q}(M)=p_\mathrm{v}\dfrac{R^3}{3r^2}\overrightarrow{e_r}}$.

c) Loi de Fourier : $\overrightarrow{j_Q}(M)=-\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T(M)$ soit ici $j_{Qr}=-\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=p_\mathrm{v}\dfrac{R^3}{3r^2}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=-\dfrac{p_\mathrm{v}R^3}{3\lambda r^2}$. On intègre par rapport à r : $T(r)=+\dfrac{p_\mathrm{v}R^3}{3\lambda r}+B$. Condition aux limites : à grande distance ($r\to\infty$), $T(\infty)=B=T_0$. Donc $\boxed{T(r)=T_0+\dfrac{p_\mathrm{v}R^3}{3\lambda r}}$

d) $\boxed{T_\mathrm{c}=T(R)=T_0+\dfrac{p_\mathrm{v}R^2}{3\lambda}}$. C'est une fonction <u>décroissante de λ</u> : plus le fluide extérieur est conducteur thermique, plus il peut évacuer la chaleur de l'animal donc plus la température cutanée est basse. Et c'est une fonction <u>croissante de R</u> : pour un animal plus gros, le rapport volume/surface est plus grand, donc l'effet du métabolisme (volumique) augmente par rapport à l'effet des pertes (surfaciques), ce qui augmente la température cutanée.

e) $\boxed{p_\mathrm{v}=\dfrac{3\lambda(T_\mathrm{c}-T_0)}{R^2}}$. AN $\boxed{p_\mathrm{v}=240\ \mathrm{kW\cdot m^{-3}}}$ dans l'eau, $\boxed{p_\mathrm{v}=2{,}4\ \mathrm{kW\cdot m^{-3}}}$ dans l'air.

Pour un mammifère marin plus petit, la puissance volumique nécessaire serait encore plus grande que $240\ \mathrm{kW\cdot m^{-3}}$: il y a un seuil de taille en deçà duquel il est impossible d'avoir un métabolisme suffisant pour compenser les fuites thermiques. Dans l'air, le seuil de taille est 100 fois plus petit.

¤ Exercice 3

a) Par définition : $\boxed{R_\mathrm{th}=\dfrac{\theta_\mathrm{int}-\theta_\mathrm{ext}}{\Phi_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}}}$ en notant $\Phi_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}$ le flux thermique (puissance thermique) traversant la vitre de l'intérieur vers l'extérieur. La résistance se calcule avec la formule $\boxed{R_\mathrm{th}=\dfrac{e}{a^2\lambda}}$. AN $\boxed{R_\mathrm{th}=7{,}2\cdot10^{-3}\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}}$.

On en déduit $\boxed{\Phi_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}=\dfrac{\theta_\mathrm{int}-\theta_\mathrm{ext}}{R_\mathrm{th}}}$. AN $\boxed{\Phi_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}=2{,}0\ \mathrm{kW}}$.

b) Les deux vitres collées auraient une épaisseur $2e$, d'où une résistance $2R_\mathrm{th}$ et un flux $\boxed{\dfrac{\Phi_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}}{2}=1{,}0\ \mathrm{kW}}$.

c) Les deux vitres et la couche d'air constituent trois résistances en série : $R_\mathrm{th,tot}=\dfrac{2e}{a^2\lambda}+\dfrac{e'}{a^2\lambda'}=\dfrac{2e\lambda'+e'\lambda}{a^2\lambda\lambda'}=1{,}1\ \mathrm{K\cdot W^{-1}}$. Le nouveau flux est donc $\boxed{\Phi'_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}=\dfrac{\theta_\mathrm{int}-\theta_\mathrm{ext}}{R_\mathrm{th,tot}}=\dfrac{(\theta_\mathrm{int}-\theta_\mathrm{ext})\,a^2\lambda\lambda'}{2e\lambda'+e'\lambda}}$. AN $\boxed{\Phi'_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}=13\ \mathrm{W}}$. Le double vitrage a diminué les pertes thermiques d'un facteur 150 (alors quelles ne sont diminuées que d'un facteur 2 en collant deux vitres)

d) Le flux est le même à travers chacun des trois conducteurs thermiques successifs (vitre, air, vitre). On peut appliquer la loi d'Ohm à chacun. Pour la vitre externe : $\theta_\text{vitre ext/air}-\theta_\mathrm{ext}=R_\mathrm{th}\times\Phi'_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}$ d'où $\boxed{\theta_\text{vitre ext/air}=\theta_\mathrm{ext}+R_\mathrm{th}\times\Phi'_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}}$. AN $\boxed{\theta_\text{vitre ext/air}=5{,}1\ \mathrm{°C}}$.

De même $\boxed{\theta_\text{vitre int/air}=\theta_\mathrm{int}-R_\mathrm{th}\times\Phi'_{\mathrm{int}\to\mathrm{ext}}}$. AN $\boxed{\theta_\text{vitre int/air}=19{,}9\ \mathrm{°C}}$. Chaque vitre a presque la même température sur ses deux faces, l'essentiel de la variation spatiale de température se fait dans la couche d'air (comprise entre 5,1 °C et 19,9 °C).

¤ Exercice 4

a) Équation de diffusion unidimensionnelle, sans terme de « source » : $\boxed{\rho c\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\lambda\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}}$.

b) On injecte la solution proposée $\underline{T}(x,t)=T_0+\underline{b}(x)\exp(j\omega t)$ dans l'équation aux dérivées partielles :

$\rho cj\omega\underline{b}(x)\exp(j\omega t)=\lambda\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{b}(x)}{\mathrm{d}x^2}\exp(j\omega t)$ soit après simplification $\dfrac{\mathrm{d}^2\underline{b}(x)}{\mathrm{d}x^2}-j\dfrac{\rho c\omega}{\lambda}\underline{b}(x)=0$. Équation caractéristique : $\underline{r}^2-j\dfrac{\rho c\omega}{\lambda}=0$ soit $\underline{r}^2=2j\dfrac{\rho c\omega}{2\lambda}=\dfrac{(1+j)^2}{\delta^2}$ donc $\underline{r}=\pm\dfrac{1+j}{\delta}$. La solution générale est donc de la forme :

$$\underline{b}(x)=a\exp\left(-(1+j)\frac{x}{\delta}\right)+c\exp\left(+(1+j)\frac{x}{\delta}\right)=a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right)+c\exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(+j\frac{x}{\delta}\right).$$

Or le milieu est semi-infini vers les x croissants, le second terme divergerait, ce qui est impossible, donc $c=0$. Il reste finalement : $\boxed{\underline{b}(x)=a\exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\dfrac{x}{\delta}\right)}$.

c) Donc $\underline{T}(x,t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-j\frac{x}{\delta}\right)\exp(j\omega t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right)$. On en prend la partie réelle pour obtenir $\boxed{T(x,t) = T_0 + a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$.

d) On nous donne $\theta_0 = 3\ °\text{C}$, soit $T_0 = 276\ \text{K}$, et $a = 15\ °\text{C} = 15\ \text{K}$. À une profondeur $x = 50\ \text{cm}$, l'amplitude des variations, toujours autour de T_0, est $a\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) = 0,49\ °\text{C} = 0,49\ \text{K}$, donc la température varie entre 2,5 °C et 3,5 °C : <u>il ne gèle pas</u>.
