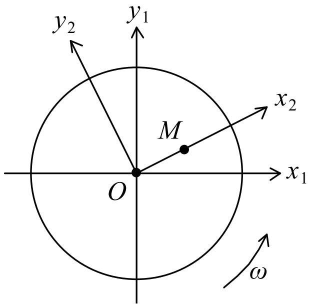
Exercices du chapitre Mc1

Cinématique du changement de référentiel

1. Mouvement radial sur un plateau tournant

Un plateau horizontal tourne avec une vitesse angulaire ω constante, autour d'un axe vertical (Oz_1) fixe par rapport au référentiel terrestre $\mathfrak{R}_1$. On notera $\mathfrak{R}_2$ le référentiel lié au plateau ; les axes (Oz_1) et (Oz_2) sont confondus.

Une petite fourmi M décrit à vitesse constante $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_2} = v\,\overrightarrow{e_{x2}}$ l'axe (Ox_2) du référentiel $\mathfrak{R}_2$. Exprimer $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_1}$ et $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}_1}$ dans la base $\left(\overrightarrow{e_{x2}},\overrightarrow{e_{y2}}\right)$.

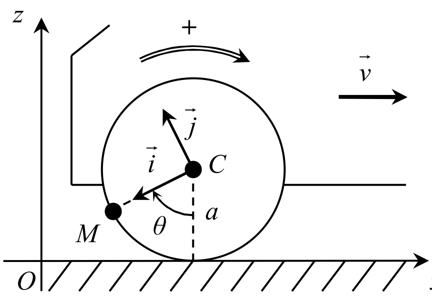


2. Mouvement d'un caillou sur un pneu

Madame Michu roule en voiture sur une route rectiligne, selon l'axe (Ox) et vers les x croissants, à une vitesse v constante.

On note $\mathfrak{R}$ le référentiel terrestre lié au repère $Oxyz$.

À un instant $t = 0$, elle roule sur un caillou M qui se trouvait au point O, et ce caillou se coince alors dans le pneu de l'une des roues, de centre C et de rayon extérieur a. On cherche à déterminer la trajectoire de M dans $\mathfrak{R}$. Pour cela, on introduit un second référentiel $\mathfrak{R}'$ lié à la voiture, donc au repère $Cxyz$.



a) La roue roulant sans glisser sur la route, de quelle distance dx avance la voiture sur le sol lorsque la roue tourne d'un angle dθ ? En déduire la relation entre v et $\dot{\theta}$.

b) Déterminer l'angle $\theta(t)$ entre la verticale descendante et le rayon [CM], en prenant $\theta(0)=0$.

c) Quel est le mouvement de $\mathfrak{R}'$ par rapport à $\mathfrak{R}$? Quel est le mouvement de M dans $\mathfrak{R}'$?

d) Déterminer, avec les lois de composition, les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathfrak{R}$ en fonction du temps. On pourra utiliser comme intermédiaire la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j},\overrightarrow{e_y}\right)$ telle que $\overrightarrow{CM} = a\,\vec{i}$.

e) Déterminer les équations paramétriques $x(t)$ et $z(t)$ de la trajectoire de M dans $\mathfrak{R}$. Représenter cette trajectoire sur un schéma (cette courbe s'appelle une cycloïde).

f) Après quelques tours, le caillou se détache de la roue : part-il vers l'avant ou vers l'arrière (par rapport au sol) ?

Dynamique en référentiel non galiléen

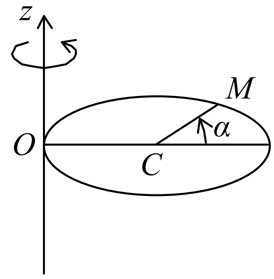
3. Oscillations sur un cercle en rotation

Un anneau circulaire *horizontal*, de centre C et de rayon r, est soudé en un point O à une tige *verticale*, confondue avec l'axe (Oz) du référentiel terrestre $\mathfrak{R}_T$ (supposé galiléen).

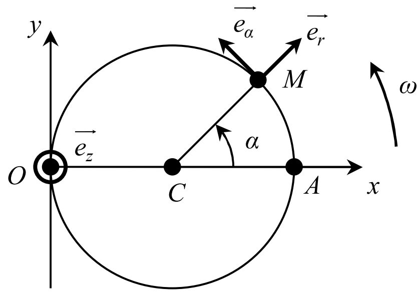
À partir de l'instant $t = 0$, on fait tourner cet anneau par rapport à $\mathfrak{R}_T$, à la vitesse angulaire ω constante, autour de (Oz). Une perle de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur l'anneau ; on note α l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{CM}$. À $t = 0^+$, M se trouve au point A (tel que $\alpha = 0$), et sa vitesse par rapport à $\mathfrak{R}_T$ est encore nulle.

On note $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$ l'accélération de la pesanteur.

Vue en perspective



Vue de dessus (dans un plan horizontal)



a) Le référentiel $\mathfrak{R}$ lié à l'anneau est-il galiléen ?

b) Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans $\mathfrak{R}$, et donner les composantes de ces forces (connues ou inconnues) dans la base $\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\alpha},\overrightarrow{e_z}$.

On pourra utiliser : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$.

c) Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire que l'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$ est : $\quad \ddot{\alpha} + \omega^2 \sin\alpha = 0$.

d) Déterminer les positions d'équilibre de M dans $\mathfrak{R}$. Préciser leur stabilité *en utilisant l'équation différentielle précédente*.

e) On suppose maintenant $\alpha \ll 1$ (petites oscillations). Déterminer alors complètement la solution $\alpha(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

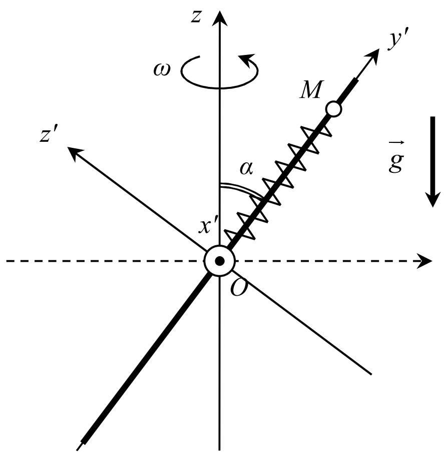
f) Montrer que la solution trouvée est en réalité incompatible avec l'hypothèse des petites oscillations. A-t-on surestimé ou sous-estimé $\sin\alpha$ (en valeur absolue) ? En déduire si l'amplitude réelle des oscillations est plus grande ou plus petite que celle calculée à la question précédente.

g) Exprimer l'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique de M dans $\mathfrak{R}$, en fonction de α, $\dot{\alpha}$ et des paramètres du système. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle précédente.

4. Mouvement sur une tige en rotation

Dans le référentiel terrestre $\mathfrak{R}$ (supposé galiléen), on définit un repère orthonormé ($Oxyz$), l'axe (Oz) étant vertical ascendant. On note $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$ l'accélération de la pesanteur.

Une tige rigide, de longueur ℓ et de milieu O, tourne autour de l'axe vertical (Oz), en faisant un angle α *constant* avec (Oz), à une vitesse angulaire ω également constante. On note (Oy') l'axe lié à cette tige, et (Ox') l'axe horizontal orthogonal à (Oy') : voir la figure ci-dessous. On note $\mathfrak{R}'$ un référentiel lié à la tige, associé au repère ($Ox'y'z'$). Un petit anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est également rappelé vers l'origine O par une force de rappel élastique, modélisée comme l'action d'un ressort linéaire idéal de constante de raideur k et de longueur à vide nulle, accroché en O (M pouvant éventuellement traverser le point O).



a) Quel type de mouvement a M dans $\Re'$? En déduire la forme de ses vecteurs vitesse $\vec{v}(M)_{\Re'}$ et accélération $\vec{a}(M)_{\Re'}$. Le référentiel $\Re'$ est-il galiléen ?
b) Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans $\Re'$ et préciser leurs composantes, connues ou inconnues, dans la base cartésienne de $\Re'$.
c) Exprimer l'énergie potentielle totale de M dans $\Re$, en fonction de y' et des paramètres du système. Déterminer les éventuelles positions d'équilibre et leur stabilité.
d) Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et le projeter sur la base cartésienne. En déduire l'équation différentielle du mouvement de M dans $\Re'$.
e) Déterminer la forme des solutions de cette équation du mouvement, sans chercher les constantes d'intégration. On montrera qu'il y a deux cas à distinguer, selon la valeur de ω. Vérifier la compatibilité de ces résultats avec ceux de la question c.
f) En déduire l'expression des composantes de la réaction de la tige sur M.

Caractère non galiléen du référentiel terrestre

5. Force de Coriolis sur un train

Un train à grande vitesse, de masse $m = 2{,}0\cdot 10^6$ kg, circule du nord vers le sud à la vitesse $v = 300\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, en un lieu de latitude $\lambda = 60°$ nord.
Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormale $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ avec $\overrightarrow{e_x}$ vers l'est, $\overrightarrow{e_y}$ vers le nord et $\overrightarrow{e_z}$ vers le zénith.
a) Faire un schéma de la Terre (en coupe ou en perspective) en faisant apparaître les éléments suivants : le méridien (et éventuellement le parallèle) passant par P ; la base ci-dessus ; le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre, ainsi que la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre.
b) Déterminer l'expression de cette force de Coriolis. Faire l'application numérique et comparer au poids du train.
(Les données concernant la Terre seront prises dans le cours.)
c) Faire cette fois un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies par le train. Lequel des deux rails s'use le plus ? Qu'est-ce qui changerait si le train allait vers le nord ?

☞ *Réponses partielles*

1. $\vec{v}(M)_{\Re_1} = v\,\overrightarrow{e_{x2}} + \omega\, x_2\, \overrightarrow{e_{y2}}$; $\vec{a}(M)_{\Re_1} = 2\,\omega\, v\,\overrightarrow{e_{y2}} - \omega^2 x_2\, \overrightarrow{e_{x2}}$.

2. a) $v = a\,\dot{\theta}$. d) $\vec{v}(M)_{\Re} = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)\overrightarrow{e_x} + v\sin\dfrac{vt}{a}\overrightarrow{e_z}$;

$\vec{a}(M)_{\Re} = \dfrac{v^2}{a}\left(\sin\dfrac{vt}{a}\overrightarrow{e_x} + \cos\dfrac{vt}{a}\overrightarrow{e_z}\right)$.

3. b) Entre autres : $\overrightarrow{F_{\text{ie}}} = m\,\omega^2\left(r\cos\alpha\,\overrightarrow{e_r} - r\sin\alpha\,\overrightarrow{e_\alpha} + r\,\overrightarrow{e_r}\right)$;

$\overrightarrow{F_{\text{ic}}} = +2\,m\,\omega\, r\,\dot{\alpha}\,\overrightarrow{e_r}$.

4. a) Mouvement rectiligne : $\vec{v}(M)_{\Re'} = \dot{y}\,\overrightarrow{e_{y'}}$.

b) $\overrightarrow{F_{\text{ie}}} = m\,\omega^2 y' \sin\alpha\left(\sin\alpha\,\overrightarrow{e_{y'}} - \cos\alpha\,\overrightarrow{e_{z'}}\right)$; $\overrightarrow{F_{\text{ic}}} = +2m\omega\,\dot{y}'\sin\alpha\,\overrightarrow{e_{x'}}$.

5. b) $\overrightarrow{F_{\text{ic}}} = -2m\,\Omega\sin\lambda\, v\,\overrightarrow{e_x}$.