

**Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 2**

**□ Premier problème**

**IV.A.1)** Les températures sur les deux faces (conditions aux limites) sont uniformes (indépendantes de  $y$  et de  $z$ ), et les dimensions selon ces deux directions sont très grandes devant l'épaisseur selon  $x$ , ainsi on peut négliger les « effets de bords » et considérer la température dans l'objet comme également indépendante de  $y$  et de  $z$ , donc fonction de  $x$  et de  $t$  seulement.

**IV.A.2)** Appliquons le premier principe à une tranche de solide comprise entre  $x$  et  $x + dx$ , entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$dU(t + dt) - dU(t) = \delta W + \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} \Leftrightarrow dC[T(x, t + dt) - T(x, t)] = 0 + \iint_{S(x)} \overline{j_Q}(x, t) \cdot \overline{e_x} \, ds \, dt - \iint_{S(x+dx)} \overline{j_Q}(x + dx, t) \cdot \overline{e_x} \, ds \, dt$$

$$\Leftrightarrow \mu ab \, dx c [T(x, t + dt) - T(x, t)] = + j_Q(x, t) ab \, dt - j_Q(x + dx, t) ab \, dt \quad \text{d'où en divisant par } ab \, dx \, dt : \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_Q}{\partial x}.$$

Avec la loi de Fourier  $\overline{j_Q} = -\lambda \overline{\text{grad} T}$ , soit ici  $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ , on obtient :  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

**IV.A.3)** En régime stationnaire :  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  donc il reste  $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ . Solution :  $T(x) = Ax + B$ . Conditions aux limites :  $T(0) = T_1 = B$  et

$T(\ell) = T_0 = A \cdot \ell + T_1$  donc  $T(x) = \frac{T_0 - T_1}{\ell} x + T_1$ . Puissance :  $\Phi = \iint_S \overline{j_Q} \cdot \overline{e_x} \, ds = j_Q ab = -\lambda \frac{dT}{dx} ab$  soit  $\Phi = -\lambda \frac{T_0 - T_1}{\ell} ab \quad (\forall x)$ .

**IV.A.4)** Par analogie avec la loi d'Ohm  $I_{1 \rightarrow 0} = \frac{V_1 - V_0}{R}$  ( $I_{1 \rightarrow 0}$  étant un flux de charge), on peut écrire  $\Phi = \frac{T_1 - T_0}{R_{\text{th}}}$  avec  $R_{\text{th}} = \frac{\ell}{\lambda ab}$ .

**IV.B.1)**  $h = \frac{\delta Q_{\text{cc}}}{(T_0 - T_a) \, dx \, dy \, dt} = \frac{d\Phi_{\text{cc}}}{(T_0 - T_a) \, dx \, dy}$  donc son unité SI est le  $\boxed{\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}}$ . Sur une surface  $S$  :  $\Phi_{\text{cc}} = h(T_0 - T_a) S$ . La

résistance thermique est définie par  $R_h = \frac{T_0 - T_a}{\Phi_{\text{cc}}}$ , soit  $R_h = \frac{1}{hS}$  ( $= \frac{1}{hab}$  ici).

**IV.B.2)** AN pour le cuivre :  $R_{\text{th,Cu}} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  ; pour le silicium :  $R_{\text{th,Si}} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  ; pour le flux conducto-convectif dans l'air immobile :  $R_h = 35 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  ; pour l'air brassé :  $R_h = 3,5 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ . Ces deux résistances étant en série (traversées l'une après l'autre par le même flux), elles s'ajoutent, ce qui donne toujours  $R_h$ , car  $R_{\text{th}}$  est négligeable, même dans l'air brassé : la chaleur diffuse beaucoup plus vite à l'intérieur du matériau (ce qui permet d'homogénéiser sa température) qu'à l'interface avec l'air, donc c'est le contact avec l'air qui limite l'évacuation de la chaleur, un changement de matériau de la plaque n'y ferait rien.

**IV.C)** Le microprocesseur, principalement en silicium, a les mêmes dimensions que ci-dessus, et il reçoit une puissance électrique  $\mathcal{P} = 15 \text{ W}$  d'après la documentation. On va considérer qu'il est entouré d'air des deux côtés, et que sa température  $T$  est uniforme (approximation précédente), et on lui applique alors le premier principe entre  $t$  et  $t + dt$  :  $U(t + dt) - U(t) = -\delta Q_{\text{cc}} + \mathcal{P} dt$

soit  $\mu ablc [T(t + dt) - T(t)] = -h(T - T_a) 2ab \, dt + \mathcal{P} dt$  d'où en divisant par  $\rho ablc \, dt$  :  $\frac{dT}{dt} = -\frac{2h}{\mu lc} (T - T_a) + \frac{\mathcal{P}}{\mu ablc}$ . Cette équation

différentielle d'ordre 1 peut se mettre sous la forme canonique  $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T = \frac{1}{\tau} \left( T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab} \right)$  avec  $\tau = \frac{\mu lc}{2h} = 41 \text{ s}$ . Solution générale :

$$T(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab}. \text{ En partant de } T(0) = T_a = 20 \text{ °C} \text{ on trouve finalement } T(t) = T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right].$$

La valeur limite est  $T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab} = 280 \text{ °C}$ . Cela ne peut pas faire fondre le silicium ni le cuivre. En revanche, la documentation indique une température  $T_{\text{jonction}} = 100 \text{ °C}$  qui semble être la température maximale (fusion des soudures ?). Celle-ci est atteinte lorsque

$$T_{\text{jonction}} = T_a + \frac{\mathcal{P}}{2hab} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \text{ d'où } t = -\tau \ln\left(1 - 2hab \frac{T_{\text{jonction}} - T_a}{\mathcal{P}}\right) = -\frac{\mu lc}{2h} \ln\left(1 - 2hab \frac{T_{\text{jonction}} - T_a}{\mathcal{P}}\right). \text{ AN } \boxed{t = 15 \text{ s}}.$$

Ce temps est beaucoup trop court pour une utilisation dans ces conditions : les systèmes de ventilation et de refroidissement sont indispensables.

**IV.D.1)** Dans le premier principe sur une tranche, on a maintenant trois transferts thermiques. En régime stationnaire :  $dU(t + dt) - dU(t) = 0 = +\delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} - \delta Q_{\text{cc}}$

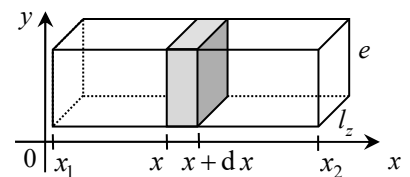
$$\Leftrightarrow +j_Q(x) el_z \, dt - j_Q(x + dx) el_z \, dt - h \cdot (T - T_a) \, dx (2e + 2l_z) \, dt = 0.$$

On divise par  $el_z \, dx \, dt$  :  $-\frac{dj_Q}{dx} - 2h \cdot (T - T_a) \frac{e + l_z}{el_z} = 0$ . En injectant  $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$  on

obtient l'équation différentielle  $\frac{d^2 T}{dx^2} - (T - T_a) \frac{2h(e + l_z)}{\lambda el_z} = 0$ , soit  $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T - T_a) = 0$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{\lambda el_z}{2h(e + l_z)}}$ .

Solution :  $T(x) - T_a = B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + C \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)$ . Conditions aux limites :  $T(H \rightarrow +\infty) = T_a = T_a + C$  donc  $C = 0$  ; et

$T(x_1) = T_R = T_a + B \exp\left(-\frac{x_1}{\delta}\right)$  donc  $B = (T_R - T_a) \exp\left(+\frac{x_1}{\delta}\right)$ . Finalement :  $T(x) = T_a + (T_R - T_a) \exp\left(-\frac{x - x_1}{\delta}\right)$ .



**IV.D.2)** Puissance totale évacuée par le radiateur (donc à l'abscisse  $x_1$ ) :  $\Phi_R = 6j_Q(x_1) \times e \times l_z = -6\lambda \frac{dT}{dx}(x_1) e l_z = 6\lambda e l_z \frac{T_R - T_a}{\delta}$  soit

$$\Phi_R = 6(T_R - T_a) \sqrt{2\lambda h e l_z (e + l_z)} . \text{ On peut l'écrire } \Phi_R = \frac{T_R - T_a}{R_{th,R}} \text{ avec } R_{th,R} = \frac{1}{6\sqrt{2\lambda h e l_z (e + l_z)}} . \text{ AN } \Phi_R = 36 \text{ W}$$

$R_{th,R} = 1,4 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ . Cette résistance thermique est beaucoup plus faible que celle du contact direct processeur/air ( $R_h = 35 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ ), donc la puissance thermique évacuée est beaucoup plus grande qu'en l'absence de radiateur.

**IV.E.1)** Le mot *caloduc* est analogue à *aqueduc*, et aux plus récents *oléoduc* et *gazoduc*, où le radical *-duc* signifie un canal de transport de quelque chose (de l'eau, du pétrole ou du gaz) : le caloduc est donc une canalisation de transport de la chaleur.

**IV.E.2)** Puisqu'il y a une force qui provoque un déplacement, cette force exerce donc un travail.

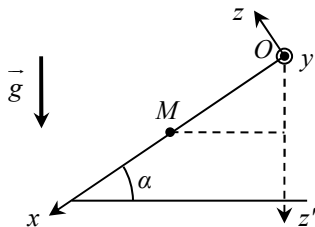
**IV.E.3)** Au point *A* l'eau est liquide à  $71 \text{ }^\circ\text{C}$ , et elle se vaporise totalement jusqu'en *B* : la transformation *AB* est celle qui a lieu sous le microprocesseur *M*. Puis *BC* est la détente adiabatique qui a lieu lorsque la vapeur d'eau se déplace de *M* à *R*, où elle arrive à  $70 \text{ }^\circ\text{C}$ . *CD* est la liquéfaction de la vapeur sous le radiateur *R*. *DA* est le réchauffement adiabatique qui a lieu lorsque l'eau liquide se déplace dans les rainures de *R* à *M*. Ceci constitue donc un petit moteur ditherme : le microprocesseur est la source chaude, dont la chaleur évacuée est convertie partiellement en travail pour déplacer l'eau dans le caloduc, le reste étant fourni au radiateur, source froide. (Les données fournies sur l'eau permettraient de calculer le rendement de ce moteur, mais apparemment la question a été supprimée !)

**IV.F)** Cette résistance thermique est :  $R_{th,calo} = \frac{T_R - T_M}{\mathcal{P}_{micro}}$ . AN  $R_{th,calo} = 0,05 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ . Si on remplaçait le caloduc par un barreau de

cuivre, on aurait  $R_{th,Cu} = \frac{y_2 - y_1}{\lambda_{Cu} l_x l_z} = 4,3 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$  : cette résistance thermique beaucoup plus grande ne permettrait pas d'évacuer toute la chaleur produite.

## α Deuxième problème

1.



On introduit comme intermédiaire de calcul un axe ( $Oz'$ ) vertical descendant.

Alors  $E_{pp} = -mgz' + \text{cte}$  soit  $E_{pp} = -mgx \sin \alpha + \text{cte}$ .

Or le schéma dans le plan incliné permet de lire  $x = L \cos \theta$ , d'où l'expression :

$$E_{pp} = -mgL \cos \theta \sin \alpha + \text{cte}.$$

**2.1.** Forces exercées sur *M* : poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  dérivant de  $E_{pp}$  ; tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$  ; réaction du plan incliné  $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$  avec  $\vec{R}_n = R_n \vec{e}_z$  (soit  $R_n = R_z > 0$  car la liaison est unilatérale) et  $\vec{R}_t = R_t \vec{e}_\theta = \pm f R_n \vec{e}_\theta$  ;  $\vec{R}_t = +f R_n \vec{e}_\theta$  lorsque  $\theta$  diminue.

Travail du poids :  $W(\vec{P}) = E_{pp}(\theta_0) - E_{pp}(\theta_1)$  soit  $W(\vec{P}) = -mgL \sin \alpha (\cos \theta_0 - \cos \theta_1)$ . Travail de la tension :  $W(\vec{T}) = 0$  car elle est constamment orthogonale au déplacement  $d\vec{OM} = L d\theta \vec{e}_\theta$ . Travail de la réaction normale :  $W(\vec{R}_n) = 0$  pour la même raison.

Travail de la réaction tangentielle :  $W(\vec{R}_t) = \int_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} \vec{R}_t \cdot d\vec{OM} = + \int_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} f R_n \vec{e}_\theta \cdot L d\theta \vec{e}_\theta = +fL \int_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} R_n d\theta$ . Pour calculer cette intégrale il faut déterminer la réaction normale, en projetant le PFD sur  $\vec{e}_z$  :  $m\vec{a}(M)_{Rz} = \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{R}_t + \vec{T}$  d'où  $0 = -mg \cos \alpha + R_n + 0 + 0$  soit  $R_n = mg \cos \alpha$ . Alors  $W(\vec{R}_t) = fLmg \cos \alpha \int_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} d\theta$  soit  $W(\vec{R}_t) = fLmg \cos \alpha (\theta_1 - \theta_0) (< 0)$ .

**2.2.** Théorème de l'énergie cinétique (intégral) entre les positions  $\theta_0$  et  $\theta_1$  :  $\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) + W(\vec{R}_n) + W(\vec{R}_t)$  soit

$$0 = -mgL \sin \alpha (\cos \theta_0 - \cos \theta_1) + 0 + 0 + fLmg \cos \alpha (\theta_1 - \theta_0) \text{ d'où } f = \tan \alpha \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}.$$

**3.1.** On remplace la réaction tangentielle par une force de frottement fluide  $\vec{F} = -h\vec{v} = -hL\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ . Théorème de l'énergie cinétique

(instantané) :  $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T}) + \mathcal{P}(\vec{R}_n) + \mathcal{P}(\vec{F})$  avec  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$  ;  $\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = -\frac{dE_{pp}}{dt} = -mgL\dot{\theta} \sin \theta \sin \alpha$  ;

$\mathcal{P}(\vec{T}) = \mathcal{P}(\vec{R}_n) = 0$  ;  $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = -hL^2\dot{\theta}^2$ . Donc  $mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgL\dot{\theta} \sin \theta \sin \alpha - hL^2\dot{\theta}^2$ . En excluant la solution particulière  $\dot{\theta} = 0$

(équilibre) et en simplifiant par  $mL^2$  on obtient :  $\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g \sin \alpha}{L} \sin \theta = 0$ .

**3.2.** Pour  $\theta \ll 1$  :  $\sin \theta \approx \theta$  d'où  $\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g \sin \alpha}{L} \theta = 0$ . En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L}}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$  soit  $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{m}{h} \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L}}$  on obtient la forme demandée.

**3.3.** Équation caractéristique :  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ . Discriminant :  $\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ .

Pour  $Q > \frac{1}{2}$ ,  $\Delta < 0$  : les racines de l'équation caractéristique sont alors  $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  que l'on peut noter  $-\frac{1}{\tau} \pm i\omega$ .

La solution est donc de la forme :  $\theta(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$ .

À  $t=0$  :  $\theta(0) = A = \theta_0$  ;  $\dot{\theta}(0) = -\frac{1}{\tau}A + \omega B = 0$  d'où  $B = \frac{\theta_0}{\omega \tau}$ . On obtient donc

finalement :  $\theta(t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \left[ \cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\omega} \sin(\omega t) \right]$  avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ .

3.4. Pseudo-période :  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}}$ . Si  $Q \gg 1$  :  $T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Temps de relaxation :  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ .

