Mc1 – Corrigé des exercices 2, 3, 4 et 5

¤ Exercice 2

a) Pendant une durée dt, la distance parcourue dx est égale à la longueur de l'arc de cercle $a\mathrm{d}\theta$ (portion de la roue ayant touché le sol). En divisant par dt on obtient $\boxed{v = a\dot{\theta}}$ (= cte).

b) On intègre : $\theta(t) = \dfrac{v}{a}t + A$ avec $\theta(0) = A = 0$, soit $\boxed{\theta(t) = \dfrac{v}{a}t}$.

c) $\mathfrak{R}'$ est en <u>translation rectiligne uniforme</u> par rapport à $\mathfrak{R}$.

Dans $\mathfrak{R}'$, M tourne autour du point fixe C à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$: le mouvement de M dans $\mathfrak{R}'$ est <u>circulaire uniforme</u>.

d) Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{v_e}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}$.

Le référentiel $\mathfrak{R}'$ étant en translation rectiligne dans $\mathfrak{R}$: $\vec{v_e}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} = \vec{v}(C)_{\mathfrak{R}} = v\,\vec{e_x}$.

D'autre part, pour M en mouvement circulaire uniforme dans $\mathfrak{R}'$: $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} = a\dot{\theta}\,\vec{j} = v\,\vec{j}$.

Donc $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = v\left(\vec{e_x} + \vec{j}\right) = v(1-\cos\theta)\vec{e_x} + v\sin\theta\,\vec{e_z}$ soit $\boxed{\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)\vec{e_x} + v\sin\dfrac{vt}{a}\vec{e_z}}$.

Loi de composition des accélérations : $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} + \vec{a_e}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} + \vec{a_c}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}}$.

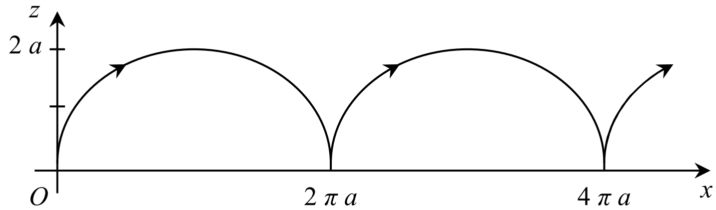
Or $\vec{a_c}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} = \vec{0}$ (translation) et $\vec{a_e}(M)_{\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}} = \vec{a}(C)_{\mathfrak{R}} = \vec{0}$ (mouvement de C rectiligne uniforme). Et l'accélération de M dans $\mathfrak{R}'$ est dirigée vers le centre du cercle :

$\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}'} = -a\dot{\theta}^2\vec{i} = -\dfrac{v^2}{a}\vec{i} = -\dfrac{v^2}{a}\left(-\sin\theta\,\vec{e_x} - \cos\theta\,\vec{e_z}\right)$. Donc $\boxed{\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = \dfrac{v^2}{a}\left(\sin\dfrac{vt}{a}\vec{e_x} + \cos\dfrac{vt}{a}\vec{e_z}\right)}$.

e) Projections de la vitesse : $\dot{x}(t) = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)$ et $\dot{z}(t) = v\sin\dfrac{vt}{a}$. On intègre par rapport à t : $x(t) = v\left(t - \dfrac{a}{v}\sin\dfrac{vt}{a}\right) + B$ et $z(t) = -v\dfrac{a}{v}\cos\dfrac{vt}{a} + C$. Et avec les conditions initiales $x(0) = z(0) = 0$: $\boxed{x(t) = vt - a\sin\dfrac{vt}{a}}$ et $\boxed{z(t) = a\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)}$.

z oscille entre 0 et $2a$, tandis que x augmente toujours (puisque $\dot{x}(t) \geq 0$).

Lorsque $\dfrac{vt}{a} = 2k\pi$, $x(t) = 2k\pi a$, $z(t) = 0$ et $\dot{x}(t) = \dot{z}(t) = 0$.



f) Lorsque le caillou quitte la roue, sa vitesse initiale a une composante $\dot{x}(t) = v\left(1-\cos\dfrac{vt}{a}\right)$ qui ne peut être que positive (ou nulle s'il est sur le sol). Il est ensuite en chute libre en gardant cette vitesse horizontale : <u>le caillou ne peut partir que vers l'avant</u>.

¤ Exercice 3

a) Le référentiel $\mathfrak{R}$ de l'anneau est <u>non galiléen</u>, car il est en <u>rotation</u> (uniforme) par rapport au référentiel terrestre galiléen.

b) Forces appliquées à M dans $\mathfrak{R}$: poids $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}}$; réaction normale de l'anneau $\boxed{\vec{R} = R_r\vec{e_r} + R_z\vec{e_z}}$; force d'inertie d'entraînement $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e}(M) = +m\omega^2\overrightarrow{OM} = m\omega^2\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}\right)$ soit $\boxed{\vec{F_{ie}} = m\omega^2\left(r\cos\alpha\,\vec{e_r} - r\sin\alpha\,\vec{e_\alpha} + r\vec{e_r}\right)}$; force d'inertie de Coriolis $\vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c}(M) = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = -2m\omega\vec{e_z}\wedge r\dot{\alpha}\vec{e_\alpha}$ soit $\boxed{\vec{F_{ic}} = +2m\omega r\dot{\alpha}\vec{e_r}}$.

c) PFD pour M dans $\mathfrak{R}$: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} = m\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}}$. Or $\vec{a}(M)_{\mathfrak{R}} = -r\dot{\alpha}^2\vec{e_r} + r\ddot{\alpha}\vec{e_\alpha}$ (mouvement circulaire), donc les projections sur la base $\vec{e_r}, \vec{e_\alpha}, \vec{e_z}$ donnent : $\begin{cases} 0 + R_r + m\omega^2 r(\cos\alpha + 1) + 2m\omega r\dot{\alpha} = -mr\dot{\alpha}^2 \\ 0 + 0 - m\omega^2 r\sin\alpha + 0 = mr\ddot{\alpha} \\ -mg + R_z + 0 + 0 = 0. \end{cases}$.

L'équation différentielle du mouvement est la deuxième (qui ne contient pas d'autre inconnue) : $\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2\sin\alpha = 0}$.

d) L'équilibre correspond à $\ddot{\alpha} = 0$ d'où $\sin\alpha = 0$, ce qui donne deux positions d'équilibre : $\boxed{\alpha = 0}$ (point A) et $\boxed{\alpha = \pi}$ (point O).

– Point A

Supposons que M s'écarte légèrement de $\alpha = 0$: si $\alpha > 0$ alors $\sin\alpha > 0$ donc $\ddot{\alpha} < 0$, alors α aura tendance à diminuer, ce qui ramène M vers A ; même chose si $\alpha < 0$. Donc <u>A est une position d'équilibre stable</u>.

– Point O

Supposons que M s'écarte légèrement de $\alpha = \pi$, soit $\alpha = \pi + \varepsilon$: si $\varepsilon > 0$ alors $\sin(\pi + \varepsilon) = -\sin\varepsilon < 0$ donc $\ddot{\alpha} > 0$, alors α aura tendance à augmenter, ce qui éloigne encore M de O ; même chose si $\varepsilon < 0$. Donc <u>O est une position d'équilibre instable</u>.

e) Pour $\alpha \ll 1$ (c'est-à-dire au voisinage de A), $\sin\alpha \approx \alpha$ donc l'équation différentielle devient : $\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$. On reconnaît un oscillateur harmonique, donc la solution générale est $\alpha(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ [d'où $\dot{\alpha}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$].

Position à $t = 0$: $\alpha(0) = 0$ donc $A = 0$. Vitesse à $t = 0$: $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}_T} = \vec{0}$ soit $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} + \vec{v_e}(M) = \vec{0}$ d'où $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = -\vec{v_e}(M) = -\vec{v}(A)_{\mathfrak{R}_T} = -2r\omega\vec{e_y}$; or $\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}} = r\dot{\alpha}\vec{e_\alpha}$, donc $\dot{\alpha}(0) = -2\omega$, d'où $B = -2$. Finalement : $\boxed{\alpha(t) = -2\sin(\omega t)}$.

f) α oscille entre –2 et 2 (radians), donc ne vérifie pas l'approximation $\alpha \ll 1$.
En réalité, $|\sin\alpha| < |\alpha|$, donc $|\ddot{\alpha}| < \omega^2 |\alpha|$: l'accélération est toujours plus faible que dans l'approximation linéaire, donc l'amplitude réelle des oscillations est plus faible que celle qu'on avait calculée.
g) Il y a deux forces conservatives, $\vec{P}$ et $\overrightarrow{F_{\text{ie}}}$. Énergie potentielle de pesanteur : $E_{\text{pp}} = +m\,g\,z + \text{cte} = \text{cte}$ puisque $z = 0$. Le seul terme variable est donc l'énergie potentielle de la force d'inertie d'entraînement (axifuge) : $E_{\text{p,ie}} = -\dfrac{1}{2} m\,\omega^2 OM^2 + \text{cte} = -\dfrac{1}{2} m\,\omega^2 (r^2 + r^2 - 2\,r^2 \cos(\pi - \alpha)) + \text{cte}$ soit $\boxed{E_{\text{p,ie}} = -m\,\omega^2 r^2 (1 + \cos\alpha) + \text{cte}}$. Énergie cinétique : $E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2} m\,v(M)^2_{\mathcal{R}}$ soit $\boxed{E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2} m\,r^2 \dot{\alpha}^2}$.
TÉM dans $\mathcal{R}$: $\dfrac{\mathrm{d}\,E_{\text{m}}}{\mathrm{d}\,t} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_{\text{nc}}}\right)_{\mathcal{R}} = 0$ car les forces non conservatives $\left(\vec{R} \text{ et } \overrightarrow{F_{\text{ic}}}\right)$ sont orthogonales à la vitesse $\left(\text{selon } \overrightarrow{e_\alpha}\right)$. Donc $-m\,\omega^2 r^2 (-\dot{\alpha} \sin\alpha) + m\,r^2 \dot{\alpha}\,\ddot{\alpha} = 0$ d'où $\dot{\alpha} = 0$ (solution particulière correspondant à l'équilibre) ou $\boxed{\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin\alpha = 0}$.

¤ Exercice 4

(Vu en classe)
Cinématique : $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} = \dot{y}'\,\overrightarrow{e_{y'}}$ et $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \ddot{y}'\,\overrightarrow{e_{y'}}$. Forces : $\vec{P} = m\,g\left(-\cos\alpha\,\overrightarrow{e_{y'}} - \sin\alpha\,\overrightarrow{e_{z'}}\right)$; $\vec{R} = R_{x'}\,\overrightarrow{e_{x'}} + R_{z'}\,\overrightarrow{e_{z'}}$; $\vec{T} = -k\,y'\,\overrightarrow{e_{y'}}$; $\overrightarrow{F_{\text{ie}}} = m\,\omega^2 y' \sin\alpha\left(\sin\alpha\,\overrightarrow{e_{y'}} - \cos\alpha\,\overrightarrow{e_{z'}}\right)$; $\overrightarrow{F_{\text{ic}}} = +2m\omega\,\dot{y}' \sin\alpha\,\overrightarrow{e_{x'}}$.

c) $\vec{P}$ dérive de $E_{\text{pp}} = +mgz = +mg\,y' \cos\alpha$; $\vec{T}$ dérive de $E_{\text{pe}} = \dfrac{1}{2} k\,y'^2$; $\overrightarrow{F_{\text{ie}}}$ dérive de $E_{\text{pa}} = -\dfrac{1}{2} m\,\omega^2 HM^2 = -\dfrac{1}{2} m\,\omega^2 y'^2 \sin^2\alpha$.
L'énergie potentielle totale est donc $\boxed{E_{\text{p}}(y') = m\,g\,y' \cos\alpha + \dfrac{1}{2}(k - m\,\omega^2 \sin^2\alpha)\,y'^2 \quad (+\text{cte})}$. Les autres forces ($\vec{R}$ et $\overrightarrow{F_{\text{ic}}}$), orthogonales au mouvement, ne travaillent pas : l'évolution de *M* est donc conservative. Les positions d'équilibre correspondent alors aux extrema de l'énergie potentielle.
$\dfrac{\mathrm{d}\,E_{\text{p}}}{\mathrm{d}\,y'} = m\,g \cos\alpha + y'(k - m\,\omega^2 \sin^2\alpha) = 0$ équivaut à $\boxed{y'_{\text{éq}} = \dfrac{m\,g \cos\alpha}{m\omega^2 \sin^2\alpha - k}}$. De plus $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_{\text{p}}}{\mathrm{d}\,y'^2} = k - m\,\omega^2 \sin^2\alpha$. Si $\dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha > 0$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_{\text{p}}}{\mathrm{d}\,y'^2} > 0$ donc $E_{\text{p}}(y'_{\text{éq}})$ est un minimum, ce qui correspond à une position d'équilibre stable. Si $\dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha < 0$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_{\text{p}}}{\mathrm{d}\,y'^2} < 0$ donc c'est un maximum, ce qui correspond à une position d'équilibre instable.
d) PFD pour *M* dans $\mathcal{R}'$: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \overrightarrow{F_{\text{ie}}} + \overrightarrow{F_{\text{ic}}} = m\,\vec{a}(M)_{\mathcal{R}'}$. Projections : $\begin{cases} 0 + R_{x'} + 0 + 0 + 2m\omega\,\dot{y}' \sin\alpha = 0 \\ -m\,g \cos\alpha + 0 - k\,y' + m\omega^2 y' \sin^2\alpha + 0 = m\,\ddot{y}' \\ -m\,g \sin\alpha + R_{z'} + 0 - m\omega^2 y' \sin\alpha \cos\alpha + 0 = 0. \end{cases}$

On tire l'équation différentielle du mouvement de la deuxième projection : $\boxed{\ddot{y}' + \left(\dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha\right) y' = -g \cos\alpha}$.

e) $\boxed{\text{Si } \dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha > 0}$, soit $\omega < \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, on peut poser $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha}}$, d'où $\ddot{y}' + \omega_0^2 y' = -g \cos\alpha$: la forme de la solution est alors $\boxed{y'(t) = -\dfrac{g \cos\alpha}{\omega_0^2} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}$. $\boxed{\text{Si } \dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha < 0}$, soit $\omega > \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, on peut poser $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega^2 \sin^2\alpha - \dfrac{k}{m}}}$, d'où $\ddot{y}' - \omega_1^2 y' = -g \cos\alpha$: la forme de la solution est alors $\boxed{y'(t) = +\dfrac{g \cos\alpha}{\omega_1^2} + A' \exp(\omega_1 t) + B' \exp(-\omega_1 t)}$.

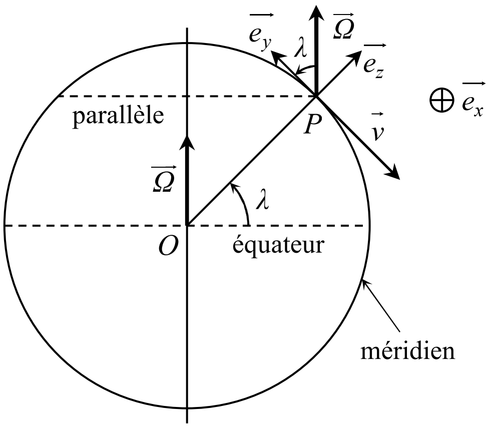
Une position d'équilibre correspond à une solution particulière constante de l'équation différentielle : $\boxed{y'_{\text{éq}} = \dfrac{m\,g \cos\alpha}{m\omega^2 \sin^2\alpha - k}}$, ce qui correspond au terme constant dans les deux solutions ci-dessus.
Si $\dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha > 0$, cette position d'équilibre est stable puisque *M* peut osciller autour d'elle. Si $\dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha < 0$, cette position d'équilibre est instable puisque *M*, légèrement écarté, s'en éloigne à l'infini (solution exponentielle).
f) D'après les deux autres projections du PFD : $R_{x'} = -2m\,\omega \sin\alpha\,\dot{y}'$ et $R_{z'} = +m\,g \sin\alpha + m\,\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\,y'$.

Si $\dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha > 0$, $\boxed{\vec{R} = -2m\omega\omega_0 \sin\alpha[-A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)]\overrightarrow{e_{x'}} + m \sin\alpha\left[g + \omega^2 \cos\alpha\left(-\dfrac{g \cos\alpha}{\omega_0^2} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)\right)\right]\overrightarrow{e_{z'}}}$.

Si $\dfrac{k}{m} - \omega^2 \sin^2\alpha < 0$, $\boxed{\vec{R} = 2m\omega\omega_1 \sin\alpha[B' \exp(-\omega_1 t) - A' \exp(\omega_1 t)]\overrightarrow{e_{x'}} + m \sin\alpha\left[g + \omega^2 \cos\alpha\left(\dfrac{g \cos\alpha}{\omega_1^2} + A' \exp(\omega_1 t) + B' \exp(-\omega_1 t)\right)\right]\overrightarrow{e_{z'}}}$.

¤ Exercice 5

a)



b) Par définition : $\overrightarrow{F_{\text{ic}}} = -m\,\overrightarrow{a_{\text{c}}}(M) = -2m\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$.

Or $\vec{\Omega} = \Omega\cos\lambda\,\overrightarrow{e_y} + \Omega\sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}$ et $\vec{v} = -v\,\overrightarrow{e_y}$

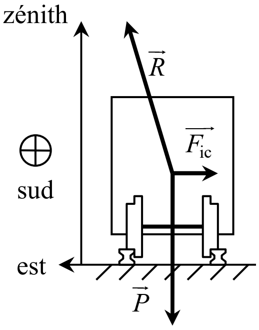
donc $\overrightarrow{F_{\text{ic}}} = -2m\left(\Omega\cos\lambda\,\overrightarrow{e_y} + \Omega\sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}\right) \wedge \left(-v\,\overrightarrow{e_y}\right)$ soit $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{ic}}} = -2m\,\Omega\sin\lambda\,v\,\overrightarrow{e_x}}$

(vers l'ouest, c'est-à-dire vers la droite).

AN $\boxed{F_{\text{ic}} = 21\ \text{kN}}$.

Or le poids est $P = mg = 20\ \text{MN}$ donc $\boxed{\dfrac{F_{\text{ic}}}{P} = 1{,}1\cdot 10^{-3} = 0{,}11\ \%}$.

c)



Aux deux forces précédentes s'ajoute la réaction $\vec{R}$ des deux rails (la force d'inertie d'entraînement, due au mouvement de la Terre, étant *déjà incluse* dans le poids).

Le PFD appliqué au train donne donc $\vec{P} + \vec{R} + \overrightarrow{F_{\text{ic}}} = m\,\vec{a}$.

Or l'accélération du train est nulle si on considère son mouvement comme rectiligne uniforme.

Si on tient compte de la courbure de la Terre, le mouvement du train est circulaire uniforme donc son accélération vaut $-\dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{e_z}$ $\left(\text{ce qui donne } ma = m\dfrac{v^2}{R} = 2200\ \text{N} \approx \dfrac{F_{\text{ic}}}{10}\right)$.

Dans les deux cas, la projection horizontale donne $R_x = -F_{\text{ic}x} = +2m\,\Omega\sin\lambda\,v$ (vers la gauche) : c'est donc le <u>rail de droite</u> (côté ouest) qui doit exercer une force de poussée horizontale, et subit alors une force opposée donc s'usera plus vite que le rail de gauche.

Si le train va vers le nord, la force de Coriolis est orientée vers l'est et c'est donc le rail du côté est qui s'use le plus, mais <u>il s'agit toujours du rail de droite</u> (par rapport au sens du train).