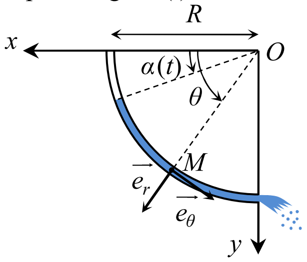
Exercices du chapitre Mc2

Description eulérienne ou lagrangienne

1. Vitesse et accélération dans un tube

Un liquide incompressible s'écoule dans un tube très fin en forme de quart de cercle de rayon R et de centre O, puis sort du tube. À un instant t, la surface libre du liquide restant dans le tube est repérée par l'angle $\alpha(t)$ avec l'horizontale.



a) Exprimer avec les notations ci-dessus la vitesse d'une particule fluide se trouvant en un point M du tube.
b) Déterminer l'expression de son accélération avec un raisonnement lagrangien (accélération d'un point matériel).
c) Retrouver cette accélération avec un raisonnement eulérien, c'est-à-dire avec la notion de champ des accélérations.

2. Écoulement radial de Hubble

Un fluide occupe initialement, de façon homogène (masse volumique $\rho(0)$ uniforme), l'intérieur d'une sphère de rayon r_0 et de centre O. À l'instant $t = 0$, on communique à chaque particule du fluide une vitesse initiale radiale $\overrightarrow{v_{\text{ini}}} = \dfrac{r_{\text{ini}}}{\tau}\overrightarrow{e_r}$, où r_{ini} est sa distance au point O et τ une constante. Ensuite chaque particule conserve cette vitesse au cours du temps.
a) En utilisant un point de vue lagrangien, donner la valeur de l'accélération d'une particule de fluide à un instant quelconque $t > 0$.
b) Déterminer le champ eulérien des vitesses en fonction des variables r et t.
c) L'écoulement est-il incompressible ? Justifier qualitativement puis mathématiquement.
d) Déterminer le champ eulérien des accélérations, et comparer au résultat de la question a.
e) Déterminer la masse volumique $\rho(t)$, uniforme, en fonction du temps, de $\rho(0)$ et de la constante τ, en exprimant la conservation de la masse *totale* du fluide.
f) Retrouver l'expression de $\rho(t)$ en résolvant l'équation *locale* de conservation de la masse. On donne la formule : $\operatorname{div}\left(A_r\overrightarrow{e_r}\right) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}$ en coordonnées sphériques.

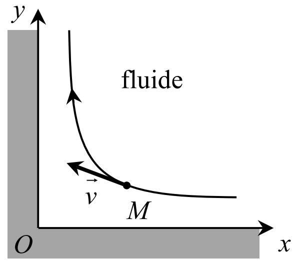
Champ des vitesses, lignes de courant et trajectoires

3. Champ de vitesse tournant

Le mouvement d'un fluide est décrit par le champ de vitesse $\vec{v}(M,t) = v_0\left[\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}\right]$ dans tout l'espace.
a) L'écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?
b) Déterminer sans calcul la nature géométrique des *lignes de courant* (aspect eulérien), et les représenter à deux instants différents.
c) Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ d'une particule fluide se déplaçant dans le plan (Oxy). En déduire l'équation cartésienne de sa *trajectoire* (aspect lagrangien), et représenter sur un schéma les trajectoires de plusieurs particules fluides.
d) En un point M à un instant t, quelle relation géométrique y a-t-il entre la ligne de courant passant par M et la trajectoire de la particule se trouvant en M ?

4. Écoulement dans un coin

Un fluide s'écoule le long de deux murs verticaux orthogonaux, confondus avec les plans (Oxz) et (Oyz).



Le champ des vitesses est de la forme : $\vec{v} = -k\,x\,\overrightarrow{e_x} + k\,y\,\overrightarrow{e_y}$ avec $x > 0$ et $y > 0$.
a) Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?
b) Cet écoulement est-il incompressible ? Justifier.
c) Montrer que l'écoulement est irrotationnel, et déterminer son potentiel des vitesses $\Phi(x, y)$.
d) Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ d'une particule fluide se déplaçant dans le plan (Oxy). En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire (aspect lagrangien).
e) Déterminer l'équation cartésienne d'une ligne de courant (aspect eulérien) dans le plan (Oxy), à partir de sa définition : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \,/\!/\, \vec{v}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}x}{v_x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{v_y}$.
f) Vérifier que les trajectoires et les lignes de courant sont confondues, et préciser leur nature géométrique.

5. Mouvement d'un cylindre dans un fluide

Un cylindre de rayon a, de génératrices parallèles à (Oz), se déplace à la vitesse constante $\overrightarrow{V_0} = -V_0\overrightarrow{e_x}$ dans un fluide initialement au repos dans le référentiel terrestre $\mathfrak{R}$, lié au repère $(Oxyz)$. On note $\mathfrak{R}'$ le référentiel en translation avec le cylindre, lié au repère $(O'xyz)$. À $t = 0$, O et O' sont confondus. Le champ des vitesses dans le référentiel $\mathfrak{R}'$ est :

$$\vec{v}(M)_{\mathfrak{R}'} = +V_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - V_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

dans une base cylindrique d'axe $(O'z)$.
a) Vérifier que les vitesses en $r = a$ et en $r \to \infty$ sont conformes aux conditions aux limites.
b) Calculer les vitesses pour $r = a$ et les angles suivants : $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$.
c) Déterminer le champ des vitesses dans $\mathfrak{R}$.
d) L'écoulement est-il stationnaire dans $\mathfrak{R}'$? dans $\mathfrak{R}$?
e) Représenter l'allure des lignes de courant dans $\mathfrak{R}'$.
f) Montrer que les lignes de courant dans $\mathfrak{R}$ sont des cercles.

Champ des vitesses et débit

6. Écoulement de Couette plan

Un fluide s'écoule dans la direction de l'axe (Ox), entre deux plaques planes parallèles au plan (Oxy), l'une immobile en $z = 0$, l'autre en $z = h > 0$ qui se déplace à la vitesse $\vec{V} = V\overrightarrow{e_x}$ $(V > 0)$. L'expression du champ des vitesses du fluide est alors : $\vec{v}(M) = V\dfrac{z}{h}\overrightarrow{e_x}$.
a) Cet écoulement est-il stationnaire ? uniforme ?
b) Sur un schéma en coupe dans le plan (Oxz), représenter les deux plaques planes, ainsi que les vecteurs vitesses de cinq points de même abscisse x et de cotes respectives $z = 0$, $z = h/4$, $z = h/2$, $z = 3h/4$ et $z = h$. Ajouter en pointillé le profil des vitesses (ligne joignant les extrémités de tous les

vecteurs vitesses des points d'abscisse x).

c) Schématiser une particule fluide « cubique » à un instant t, en dessinant quatre points en carré (par exemple deux de cote $z = h/4$ et deux de cote $z = h/2$) et leurs vecteurs vitesses. Dessiner ce que devient la particule fluide à un instant $t + \mathrm{d}t$, et en déduire si l'écoulement semble incompressible, et s'il semble irrotationnel. Vérifier ces deux propriétés par le calcul.

d) Calculer le débit volumique D_V à travers une section rectangulaire de hauteur h et de largeur a. En déduire la *vitesse débitante* $v_\mathrm{d} = D_V/ah$ (vitesse moyenne sur la section).

☞ *Réponses partielles*

1. b) $\vec{a}(M,t) = R\ddot{\alpha}\,\overrightarrow{e_\theta} - R\dot{\alpha}^2\,\overrightarrow{e_r}$.

2. b) $\vec{v}(M,t) = \dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}$. e) $\rho(t) = \dfrac{\rho(0)}{(1+t/\tau)^3}$.

3. b) Ce sont des droites (à préciser). c) Ce sont des cercles (à préciser).

4. d) L'équation est de la forme $xy = \text{cte}$.

5. f) Équation d'une ligne de courant : $r = 2b\sin\theta$.

6. c) L'écoulement est incompressible, il n'est pas irrotationnel.