Mc2 – Corrigé des exercices 2, 3, 4 et 5

¤ Exercice 2

a) Puisque chaque particule conserve sa vitesse (direction, sens et norme), son mouvement est rectiligne uniforme, donc $\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$.

b) Considérons la particule se trouvant en M à l'instant t. Elle possède toujours la vitesse qu'elle avait au départ, soit $\vec{v} = \overrightarrow{v_{\text{ini}}} = \dfrac{r_{\text{ini}}}{\tau}\overrightarrow{e_r}$,

et elle a donc parcouru entre 0 et t la distance : $r - r_{\text{ini}} = vt \Leftrightarrow r - v\tau = vt$ d'où on tire $v = \dfrac{r}{t+\tau}$, soit $\boxed{\vec{v}(M,t) = \dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}}$.

c) Plus une particule fluide est loin du centre initialement, plus elle va vite : les particules s'éloignent donc les unes des autres, c'est-à-dire que <u>le fluide se dilate</u> : l'écoulement <u>n'est pas incompressible</u>.

Mathématiquement, on calcule : $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\left(\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\right) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{r^3}{t+\tau}\right)$ d'après la formule fournie, soit $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{3}{t+\tau} > 0$. La divergence n'étant pas nulle, l'écoulement <u>n'est pas incompressible</u>. Son signe positif indique d'ailleurs que le champ de vitesse a tendance à diverger géométriquement, ce qui est évident dès le départ.

d) $\vec{a}(M,t) = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\right) + \left(\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right)\left(\dfrac{r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\right) = -\dfrac{r}{(t+\tau)^2}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{r}{t+\tau}\times\dfrac{1}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}$ soit $\boxed{\vec{a}(M,t) = \vec{0}}$. On retrouve bien le résultat de la question a.

e) Le fluide occupe à $t = 0$ l'intérieur d'une sphère de rayon r_0. À l'instant t quelconque, il occupe toujours une sphère, dont le rayon est la position des particules les plus éloignées de O : elles étaient initialement à $r_{\text{ini}} = r_0$, et sont maintenant à $r_0 + vt = r_0 + \dfrac{r_0}{\tau}t$.

La masse totale se conserve, soit : $m(t) = m(0) \Leftrightarrow \rho(t)\dfrac{4}{3}\pi\left(r_0 + \dfrac{r_0}{\tau}t\right)^3 = \rho(0)\dfrac{4}{3}\pi r_0^3$ d'où $\boxed{\rho(t) = \dfrac{\rho(0)}{\left(1+t/\tau\right)^3}}$.

f) Équation de conservation de la masse : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div}\left(\dfrac{\rho r}{t+\tau}\overrightarrow{e_r}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \dfrac{3\rho}{t+\tau} = 0$. Pour résoudre cette équation différentielle à coefficient non constant, on sépare les variables : $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\dfrac{3\,\mathrm{d}t}{t+\tau}$. On peut alors intégrer de chaque côté :

$\ln\rho(t) - \ln\rho(0) = -3\ln(t+\tau) + 3\ln\tau$ ce qui équivaut à $\boxed{\rho(t) = \dfrac{\rho(0)}{\left(1+t/\tau\right)^3}}$.

¤ Exercice 3

a) L'écoulement n'est <u>pas stationnaire</u>, puisque les deux composantes du champ de vitesse dépendent du temps.
Il est <u>uniforme</u>, puisque le champ de vitesse ne dépend pas des coordonnées spatiales du point M.

b) Le champ des vitesses étant uniforme, à chaque instant les lignes de courant sont des <u>droites parallèles entre elles</u>, faisant l'angle ωt avec l'axe (Ox) (d'après les projections du vecteur vitesse).

c) $\dot{x} = v_0\cos(\omega t)$ et $\dot{y} = v_0\sin(\omega t)$, d'où en intégrant : $\boxed{x(t) = A + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$ et $\boxed{y(t) = B - \dfrac{v_0}{\omega}\cos(\omega t)}$. L'équation cartésienne s'obtient en éliminant t entre x et y : dans ce cas on utilise la relation $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$, d'où : $\boxed{(x-A)^2 + (y-B)^2 = \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$.

C'est l'équation d'un <u>cercle</u> de rayon $\boxed{R = v_0/\omega}$ (le même pour toutes les particules fluides) et de centre $\Omega(A,B)$ (différent pour chaque particule, en fonction de sa position initiale).

d) La ligne de courant est <u>tangente</u> à la trajectoire (puisque le vecteur vitesse est tangent aux deux).

¤ Exercice 4

a) L'écoulement est <u>stationnaire</u>, puisque tous les termes du champ de vitesse sont indépendants du temps.
Il n'est <u>pas uniforme</u>, puisque le champ de vitesse dépend des coordonnées spatiales x et y.

b) $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = -k + k = 0$: l'écoulement est <u>incompressible</u>.

c) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$: l'écoulement est <u>irrotationnel</u>. Il existe donc un potentiel des vitesses $\Phi(x,y)$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$, soit $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = v_x = -kx$ et $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = v_y = ky$. On intègre par rapport à x : $\Phi(x,y) = -k\dfrac{x^2}{2} + A(y)$. On dérive par rapport à y et on identifie : $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y} = ky$ d'où en intégrant à nouveau : $A(y) = k\dfrac{y^2}{2} + \text{cte}$. Finalement : $\boxed{\Phi(x,y) = \dfrac{1}{2}k(y^2 - x^2) + \text{cte}}$.

d) Équations du mouvement : $\dot{x} = -kx$ et $\dot{y} = +ky$. Solutions : $\boxed{x(t) = B\exp(-kt)}$ et $\boxed{y(t) = C\exp(+kt)}$. On élimine le temps entre les deux en faisant le produit : $\boxed{xy = \text{cte}}$ $(= BC)$ ou $\boxed{y = \dfrac{\text{cte}}{x}}$.

e) $\dfrac{\mathrm{d}x}{v_x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{v_y} \Leftrightarrow -\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = +\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$. On intègre des deux côtés : $-\ln x = \ln y - \ln(\text{cte})$ soit $\boxed{y = \dfrac{\text{cte}}{x}}$.

f) Les lignes de courant sont <u>confondues</u> avec les trajectoires des particules fluides dans cet écoulement <u>stationnaire</u>. Ce sont des <u>branches d'hyperboles</u>.

¤ Exercice 5

a) En $r = a$, $\vec{v}(M)_{\Re'} = -2V_0 \sin\theta\, \overrightarrow{e_\theta}$: la vitesse au contact du solide est bien <u>tangente au solide</u> (composante normale nulle).

En $r \to \infty$, $\vec{v}(M)_{\Re'} = +V_0 \cos\theta\, \overrightarrow{e_r} - V_0 \sin\theta\, \overrightarrow{e_\theta} = V_0\, \overrightarrow{e_x} = -\overrightarrow{V_0}$, ce qui correspond à $\vec{v}(M)_{\Re} = \vec{0}$ (loi de composition des vitesses) : à grande distance, le fluide reste immobile, <u>non affecté par la présence du solide</u>.

b) $\theta = 0$: $\boxed{\vec{v}(a,0)_{\Re'} = \vec{0}}$. $\theta = \pi/2$: $\boxed{\vec{v}(a,\pi/2)_{\Re'} = +2V_0\, \overrightarrow{e_x}}$. $\theta = \pi$: $\boxed{\vec{v}(a,\pi)_{\Re'} = \vec{0}}$. $\theta = 3\pi/2$: $\boxed{\vec{v}(a,3\pi/2)_{\Re'} = +2V_0\, \overrightarrow{e_x}}$.

c) Loi de composition des vitesses : $\vec{v}(M)_{\Re} = \vec{v}(M)_{\Re'} + \overrightarrow{v_e}(M)_{\Re'/\Re}$ soit $\vec{v}(M)_{\Re} = +V_0\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\, \overrightarrow{e_r} - V_0\left(1 + \dfrac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\, \overrightarrow{e_\theta} - V_0\, \overrightarrow{e_x}$ soit

$$\boxed{\vec{v}(M)_{\Re} = -V_0 \frac{a^2}{r^2}\cos\theta\, \overrightarrow{e_r} - V_0 \frac{a^2}{r^2}\sin\theta\, \overrightarrow{e_\theta}}.$$

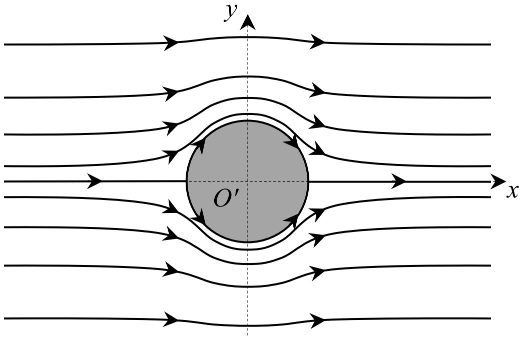
d) L'écoulement <u>est stationnaire dans $\Re'$</u>, car le champ de vitesse donné ne contient que des termes indépendants du temps.

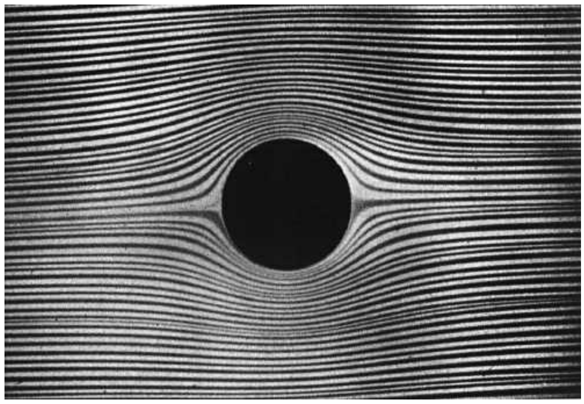
Mais l'écoulement <u>n'est pas stationnaire dans $\Re$</u>, car le champ de vitesse ci-dessus est exprimé dans la <u>base cylindrique liée au cylindre</u>, donc les vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ ainsi que les coordonnées r et θ <u>dépendent du temps dans un référentiel où le cylindre bouge</u>. (Il est d'ailleurs évident que si on regarde un point donné, en étant fixe dans $\Re$, l'écoulement varie lorsque le cylindre passe).

e) Dans $\Re'$, les lignes de champ sont confondues avec les trajectoires des particules fluides (écoulement stationnaire).

On utilise les informations trouvées sur le champ de vitesse au contact du cylindre (tangent au cylindre) et à grande distance (uniforme), et entre ces deux zones on trace des lignes de forme intermédiaire, qui montrent comment le fluide contourne le cylindre.

D'autre part, l'expression du champ de vitesse est symétrique par rapport à l'axe ($O'x$) et antisymétrique par rapport à l'axe ($O'y$).





f) $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \,//\, \vec{v}$ soit $\dfrac{\mathrm{d}r}{v_r} = \dfrac{r\,\mathrm{d}\theta}{v_\theta} \Leftrightarrow \dfrac{r^2}{a^2\cos\theta}\mathrm{d}r = \dfrac{r^2}{a^2\sin\theta} r\,\mathrm{d}\theta \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}r}{r} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\sin\theta}$ d'où après intégration : $\ln r = \ln(\sin\theta) + \mathrm{cte}$

$\Leftrightarrow r = \mathrm{cte} \times \sin\theta$. Si on note la constante $2b$, l'équation $\boxed{r = 2b\sin\theta}$ est celle d'un <u>cercle de rayon b et passant par O</u>.