<u>Devoir d'entraînement de physique n° 3</u>

<u>**Premier problème**</u> (Centrale-Supélec PC 2010)

Microscope optique

Un microscope optique porte les indications suivantes : sur son objectif : ×40 ; sur son oculaire: ×10. La notice constructeur précise : intervalle optique Δ = 16 cm. La signification de ces indications sera précisée dans la suite (à lire avec attention !).
Le microscope sera modélisé par deux lentilles minces convergentes, l'objectif (de diamètre d = 7,0 mm) et l'oculaire. Il est réglé pour donner une image à l'infini d'un objet réel AB, perpendiculaire à l'axe optique, A étant placé sur l'axe, légèrement en avant du foyer objet de l'objectif. Cette image est observée par un œil emmétrope placé au voisinage du foyer image F_2' de l'oculaire.
L'œil nu voit nettement des objets situés entre la distance δ = 25 cm et l'infini.

1. Faire un schéma du dispositif (sans respecter l'échelle) et tracer soigneusement la marche de deux rayons lumineux issus du point B de l'objet AB, l'un émis parallèlement à l'axe optique, l'autre passant par F_1 (foyer objet de la lentille L_1 équivalente à l'objectif, de centre optique O_1).

2. L'indication portée sur l'oculaire (×10) est son *grossissement commercial*, c'est-à-dire le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image à l'infini d'un objet à travers *l'oculaire seul* et de l'angle sous lequel on voit ce même objet à l'œil nu lorsqu'il est situé à la distance minimale de vision distincte ; on notera ce grossissement G_2 = 10. Déterminer f_2', distance focale image de l'oculaire.

3. L'intervalle optique correspond à la distance $F_1'F_2$. La valeur absolue du *grandissement* de l'objet AB par l'objectif est : $|\gamma_1|$ = 40 (c'est l'indication ×40). Calculer f_1', distance focale image de la lentille équivalente à l'objectif. Calculer la distance O_1A permettant de positionner l'objet.

4. Calculer, dans le cas d'une image finale à l'infini, le grossissement commercial G du microscope.

5. On appelle cercle oculaire l'image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire. Déterminer sa position par rapport à F_2' et son diamètre. Quel est l'intérêt de placer l'œil dans le plan du cercle oculaire ? Commenter la valeur trouvée pour son diamètre.

<u>**Deuxième problème**</u> (Centrale-Supélec PSI 2014)

Étude d'un écoulement

On considère l'écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide, de viscosité η et de masse volumique ρ, dans une conduite horizontale cylindrique, de rayon a, de longueur ℓ et d'axe (Oz). On repère un point M du fluide par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

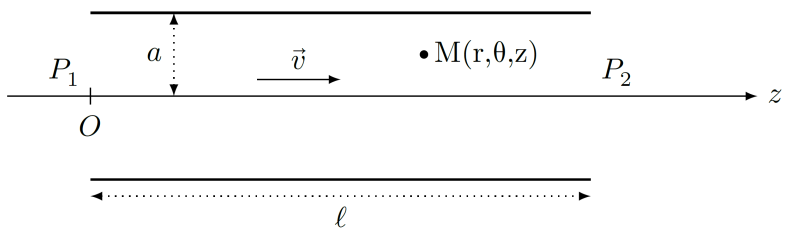

Figure 3

La cause de l'écoulement est la différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$ entre l'entrée et la sortie de la conduite. On néglige les effets du champ de pesanteur et on cherche à déterminer le champ de pression P et le champ de vitesse $\vec{v}$ du fluide. Dans cet écoulement, appelé écoulement de Poiseuille, le champ des vitesses prend la forme générale $\vec{v} = v(r, \theta, z, t)\vec{u}_z$ et satisfait à l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \rho \left(\vec{v}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \eta \Delta \vec{v}$$

0) *Question supplémentaire*
Il y a une erreur dans cette formule de l'énoncé ! Corriger cette erreur.

1) Rappeler la signification de chacun des quatre termes intervenant dans l'équation de Navier-Stokes.

2) Montrer que l'on peut réduire l'étude à $\vec{v} = v(r)\vec{u}_z$ et que l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation de Stokes $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \eta \Delta \vec{v}$.

3) Projeter l'équation de Stokes dans la base cylindrique ; puis montrer que $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$ est une constante que l'on exprimera en fonction de ΔP et ℓ. En déduire le champ de pression P en fonction ΔP, z, ℓ et P_1.

4) En considérant que $v(0)$ doit avoir une valeur finie, exprimer le champ de vitesse $\vec{v}$ en fonction de ΔP, η, ℓ, r et a.

5) Montrer que le débit volumique satisfait la loi de Poiseuille, $D_v = \dfrac{\pi d^4 \Delta P}{128 \eta \ell}$ où $d = 2a$ est le diamètre de la conduite. En déduire l'expression de la vitesse débitante v_d telle que $D_v = v_d S$ où S est la section droite de la conduite.

6) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}$. L'écoulement est-il irrotationnel ? Ce résultat est-il surprenant ? Pourquoi ? Proposer une explication physique.

7) Mesure de la viscosité de l'acide sulfurique H_2SO_4 à $0{,}010\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

On utilise le dispositif schématisé figure 4 qui comporte :
- un récipient contenant de l'acide sulfurique ;
- un orifice de vidange en bas du récipient et situé à une hauteur h en dessous de la surface libre d'acide ;
- un long tube de verre dans lequel s'effectue l'écoulement de Poiseuille, de diamètre $d = 4{,}00$ mm et de longueur $\ell = 1{,}50$ m ;
- un bécher pour récupérer l'acide de vidange ;
- une balance pour peser la masse m d'acide de vidange ;
- un chronomètre pour mesurer le temps τ de vidange.

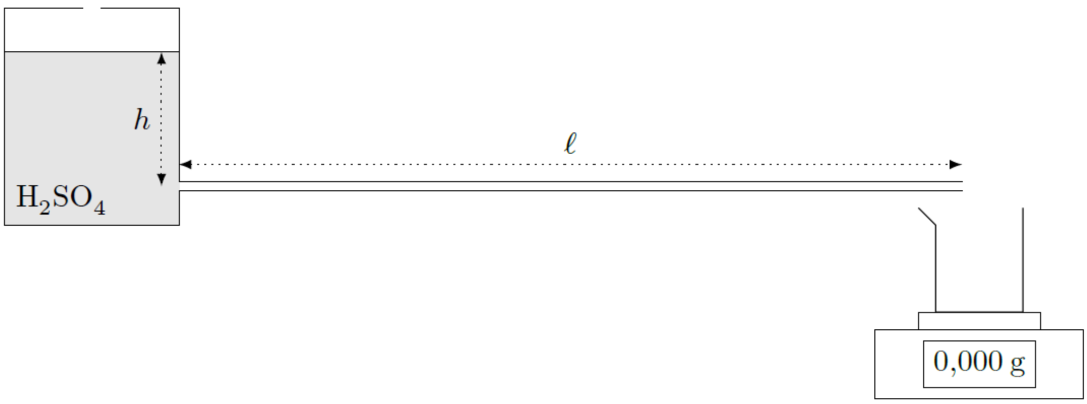

Figure 4

Pour une hauteur $h = 20{,}0$cm (qui reste à peu près constante durant la vidange) et un temps de vidange $\tau = 30$s on mesure une masse $m = 220$ g. En déduire la valeur de la viscosité η de l'acide sulfurique.

On donne : $\rho = 1{,}00 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Comparer à la valeur de la viscosité de l'eau $\eta_{\text{eau}} = 1{,}00 \times 10^{-3}$ Pl. Quelle est l'origine physique du phénomène responsable de l'écart observé ?

Pour la suite du problème on admettra la valeur $\eta = 1{,}12 \times 10^{-3}$ Pl.

En déduire la valeur de la vitesse débitante v_d.

Formulaire

En coordonnées cartésiennes $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y + V_z \vec{u}_z$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques $\vec{V} = V_r \vec{u}_r + V_\theta \vec{u}_\theta + V_z \vec{u}_z$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

$$\Delta \vec{V} = \Delta V_r \vec{u}_r + \Delta V_\theta \vec{u}_\theta + \Delta V_z \vec{u}_z \qquad \text{avec} \qquad \Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$