Exercices du chapitre Mc3

Ordres de grandeur en mécanique des fluides

1. Nombre de Reynolds et force de traînée

Évaluer le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement de l'air (masse volumique $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, viscosité dynamique $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}$) autour des corps sphériques suivants, et en déduire l'expression adéquate de la force de traînée :

a) balle de ping-pong, de diamètre $D = 40\ \mathrm{mm}$, lancée à $V = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$;

b) ballon de basketball, de diamètre $D = 23{,}9\ \mathrm{cm}$, lancé à $V = 9{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$;

c) goutte de brouillard de diamètre $D = 20\ \mathrm{\mu m}$, tombant à $V = 1{,}0\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$.

2. Nombre de Mach et écoulement incompressible

Le nombre de Mach d'un écoulement est défini par : $Ma = \dfrac{V}{c}$

où V est l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement et c la célérité du son dans le fluide. Le fait qu'un écoulement de gaz puisse être considéré comme incompressible est lié à l'ordre de grandeur de Ma.

On note ρ la masse volumique du fluide, μ l'ordre de grandeur de la *variation* de cette masse volumique dans l'écoulement, P la pression, p l'ordre de grandeur de la *variation* de la pression dans l'écoulement, L une longueur caractéristique de l'écoulement, τ une durée caractéristique de l'écoulement.

a) Énoncer l'équation locale de conservation de la masse, et en déduire qu'un écoulement incompressible vérifie $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

En pratique, on pourra considérer qu'un écoulement est incompressible si $\left\|\operatorname{div}\vec{v}\right\| \ll \dfrac{V}{L}$.

b) Déduire de cette condition une relation en ordres de grandeur entre μ, τ, ρ, V et L.

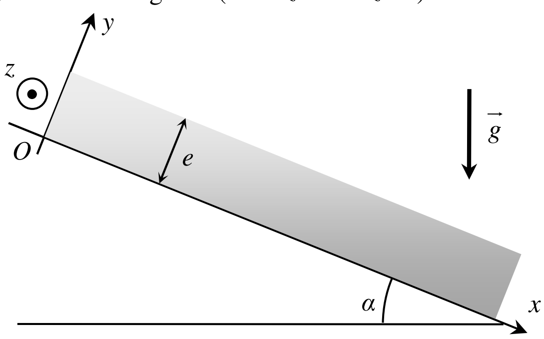
c) Écrire l'équation de Navier–Stokes pour un écoulement parfait stationnaire, en négligeant l'effet du poids (très faible dans un gaz). En déduire une relation en ordres de grandeur entre ρ, V et p.

d) On montre en physique des ondes (voir chapitre On2) que $p \sim \mu c^2$. En déduire finalement qu'un écoulement de gaz peut être considéré comme incompressible lorsque $Ma^2 \ll 1$.

Équations de la dynamique

3. Écoulement visqueux sur un plan incliné

Un liquide incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ, s'écoule sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, sur une épaisseur e (entre $y = 0$ et $y = e$) et sur une largeur l (entre $z = 0$ et $z = l$).



L'écoulement est stationnaire, avec un champ de vitesse $\vec{v} = v_x(y)\vec{e_x}$. On néglige les forces de viscosité à l'interface entre le liquide et l'air. La pression dans l'air est P_0.

a) Déterminer la pression en tout point du liquide, en fonction de ρ, g, α, e, P_0 et y.

b) Déterminer le champ de vitesse en fonction de ρ, g, η, α, e et y. Représenter graphiquement le profil de vitesse.

c) Calculer le débit massique D_m.

4. Champ de pression dans un vortex de Rankine

On étudie un tourbillon d'eau stationnaire, à symétrie de révolution autour de l'axe vertical (Oz). L'altitude $z = 0$ correspond à la surface libre de l'eau à grande distance de l'axe du tourbillon. L'eau a une masse volumique uniforme ρ et sa viscosité est négligée (écoulement parfait). Son champ de vitesse a la forme suivante en coordonnées cylindriques :

$$\text{pour } r < a,\ \vec{v} = r\omega\vec{e_\theta} \quad ; \qquad \text{pour } r > a,\ \vec{v} = \frac{a^2\omega}{r}\vec{e_\theta}$$

où a et ω sont des constantes.

On note P_0 la pression atmosphérique et $\vec{g} = -g\,\vec{e_z}$ le champ de pesanteur.

a) Calculer le vecteur tourbillon dans chacune des deux régions ($r < a$ et $r > a$).

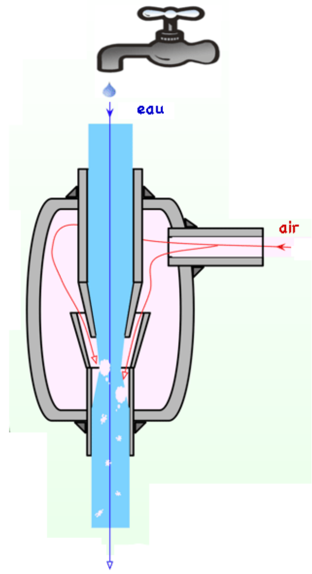
On donne : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(f(r)\vec{e_\theta}\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r\,f(r))}{\mathrm{d}r}\vec{e_z}$.

b) Déterminer le champ de pression dans l'eau.

c) Déterminer l'équation de la surface libre, et la représenter sur un schéma en coupe verticale.

5. Effet Venturi et trompe à eau

L'effet Venturi est utilisé par exemple pour réaliser une trompe à eau (mise à profit en chimie pour la filtration sur Büchner).



On suppose l'écoulement parfait, homogène, incompressible et stationnaire dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

a) Préciser le sens physique de chacun des termes utilisés dans la phrase précédente.

b) À l'aide d'une équation de conservation de la matière, établir une relation entre la vitesse en un point A à la sortie du robinet (dans le tube de rayon R_A) et la vitesse en un point B dans la zone de rétrécissement (de rayon $R_B < R_A$).

c) À l'aide d'une équation d'évolution, en déduire la dépression $P_B - P_A$ en fonction de la vitesse v_A, des rayons des tuyaux et de la masse volumique ρ de l'eau.

d) La dépression est limitée par la pression de vapeur saturante de l'eau à température ambiante (20 °C), $\Pi = 2500\ \mathrm{Pa}$. Que se passe-t-il si $P_B < \Pi$?

e) Calculer alors la vitesse maximale et le débit maximal du robinet. Pour l'application numérique on prendra R_A = 1 cm, R_B = 0,2 cm et les valeurs habituelles des autres données.

6. Propulsion d'une fusée

Une fusée a les caractéristiques suivantes : masse des structures et de l'équipement $M = 5{,}0$ t ; masse du mélange propulsif au départ : $m_0 = 50{,}0$ t ; vitesse d'éjection des gaz brûlés (par rapport à la fusée) : $u = 2500\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; débit des gaz brûlés : $D = 400\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. On néglige la résistance de l'air et on supposera constante l'intensité de la pesanteur ($g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$). L'instant du lancement est pris comme origine des temps ; on cherche à déterminer la vitesse $\vec{v}(t)$ de la fusée, puis son altitude $z(t)$.

a) La fusée étant un système ouvert, on doit se ramener à un système fermé : on prend la fusée avec le carburant restant à un instant t ; à un instant ultérieur $t + \mathrm{d}t$, ce système s'est séparé en deux (d'une part les gaz éjectés, d'autre part la fusée avec le carburant restant). Quelle est la masse $m(t)$ de ce système ? Écrire la variation élémentaire $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t)$ de la quantité de mouvement de ce système en fonction de $\mathrm{d}\vec{v} = \vec{v}(t+\mathrm{d}t) - \vec{v}(t)$, M, m_0, D, t, $\mathrm{d}t$ et $\vec{u}$. (On négligera les infiniment petits d'ordre 2.)

b) En déduire, par application du théorème de la quantité de mouvement, l'accélération $\vec{a}(t)$ de la fusée. Vérifier que les valeurs numériques données permettent effectivement le décollage de la fusée.

c) Après avoir projeté sur l'axe vertical ascendant (Oz), déterminer la vitesse $v(t)$, puis l'altitude $z(t)$ de la fusée.

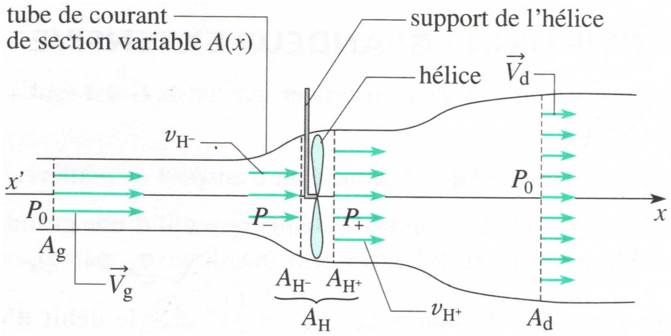
d) À quel instant t_1 se termine la combustion du carburant ? Calculer alors $v(t_1)$ et $z(t_1)$.

7. Puissance reçue par une éolienne

Une hélice d'éolienne tourne autour de l'axe fixe horizontal (Ox). Elle est traversée par un écoulement d'air supposé incompressible (la masse volumique de l'air est notée ρ).

Loin de l'hélice, l'air a une vitesse constante et uniforme $\vec{V_\mathrm{g}} = v_\mathrm{g}\vec{e_x}$ en amont, et une vitesse constante et uniforme $\vec{V_\mathrm{d}} = v_\mathrm{d}\vec{e_x}$ en aval. Le tube de courant qui englobe l'hélice a une section droite d'aire variable $A(x)$: à grande distance, elle vaut A_g en amont et A_d en aval.

On note D_m le débit massique de l'air à travers l'éolienne.



La pression de l'air vaut P_0 à l'extérieur du tube de courant, et également sur les sections d'aires A_g et A_d.

L'écoulement est supposé parfait, et les tourbillons sont localisés uniquement au voisinage de l'hélice, entre les deux sections notées $A_{\mathrm{H^-}}$ et $A_{\mathrm{H^+}}$, de même aire A_H. Sur ces deux sections, les pressions sont notées P_- et P_+ et les vitesses $v_{\mathrm{H^-}}$ et $v_{\mathrm{H^+}}$ respectivement.

a) Montrer que $v_{\mathrm{H^-}} = v_{\mathrm{H^+}}$ (que l'on notera v_H), et déterminer les relations entre les sections et les vitesses.

b) Appliquer la relation de Bernoulli entre les sections A_g et $A_{\mathrm{H^-}}$, puis entre $A_{\mathrm{H^+}}$ et A_d, et en déduire une relation entre P_-, P_+, v_g, v_d et ρ. Pourquoi ne peut-on pas appliquer cette relation entre $A_{\mathrm{H^-}}$ et $A_{\mathrm{H^+}}$?

c) Exprimer de deux façons différentes la force $\vec{F} = F\vec{e_x}$ exercée par l'air sur l'hélice :
- d'une part en faisant un bilan sur la surface de contrôle délimitée par les sections $A_{\mathrm{H^-}}$ et $A_{\mathrm{H^+}}$;
- d'autre part en faisant un bilan sur la surface de contrôle délimitée par les sections A_g et A_d.

En déduire v_H en fonction de v_g et v_d, puis F en fonction de ρ, A_H, v_g et v_H.

d) Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ cédée par le fluide à l'hélice.

e) On pose $v_\mathrm{H} = v_\mathrm{g} u$ où u est un paramètre sans dimension. Déterminer, pour A_H et v_g données, la valeur de u qui rend $\mathcal{P}$ maximale, et exprimer alors F et $\mathcal{P}_{\max}$ (formule de Betz) en fonction de ρ, v_g et A_H.

f) On suppose que l'on a construit une hélice maximisant la puissance, avec les paramètres suivants : $A_\mathrm{H} = 2000\ \mathrm{m^2}$, $v_\mathrm{g} = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Calculer F et $\mathcal{P}_{\max}$.

☞ *Réponses partielles*

2. b) $\dfrac{\mu}{\tau} \ll \rho\dfrac{V}{L}$.

3. a) $P = P_0 - \rho g \cos\alpha (y - e)$. c) $D_m = \dfrac{\rho^2 g l e^3 \sin\alpha}{3\eta}$.

4. b) Pour $r > a$: $P(r,z) = P_0 - \rho g z - \rho\omega^2 \dfrac{a^4}{2r^2}$.

6. a) $\mathrm{d}\vec{p} = (M + m_0 - Dt)\,\mathrm{d}\vec{v} + D\,\mathrm{d}t\,\vec{u}$. c) $v(t) = u \ln\left(\dfrac{M + m_0}{M + m_0 - Dt}\right) - g\,t$.

7. a) $A_\mathrm{g} v_\mathrm{g} = A_\mathrm{H} v_\mathrm{H} = A_\mathrm{d} v_\mathrm{d}$. c) $v_\mathrm{H} = \dfrac{v_\mathrm{g} + v_\mathrm{d}}{2}$, $F = 2\rho A_\mathrm{H}(v_\mathrm{g} - v_\mathrm{H})v_\mathrm{H}$.