Mc3 – Corrigé des exercices 2, 3 (fin), 4, 5, 6, 7

¤ Exercice 2

a) Équation locale de conservation de la masse, $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right)=0$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0$. Un écoulement incompressible est défini par $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$, d'où $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v}=0}$.

b) $\left\|\mathrm{div}\,\vec{v}\right\|\ll\dfrac{V}{L}$ équivaut à $\dfrac{1}{\rho}\left|\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right|\ll\dfrac{V}{L}$ Or $\left|\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\right|\sim\dfrac{\mu}{\tau}$ donc on obtient $\boxed{\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mu}{\tau}\ll\dfrac{V}{L}}$.

c) L'équation de Navier–Stokes $\rho\left(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right)=\rho\vec{g}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P+\eta\Delta\vec{v}$ devient $\boxed{\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\approx-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}$ pour un écoulement parfait stationnaire où on néglige le poids. Donc $\dfrac{\rho V^2}{L}\sim\dfrac{p}{L}$ soit $\boxed{\rho V^2\sim p}$.

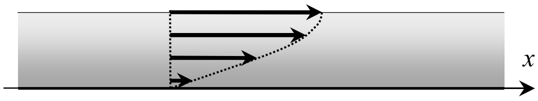
d) Cette équation devient $\rho V^2\sim\mu c^2$ soit $\dfrac{\mu}{\rho}\sim\dfrac{V^2}{c^2}=Ma^2$. Donc la condition $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mu}{\tau}\ll\dfrac{V}{L}$ est équivalente à $\dfrac{Ma^2}{\tau}\ll\dfrac{V}{L}$. Enfin $V\sim\dfrac{L}{\tau}$ donc on trouve finalement $\boxed{Ma^2\ll 1}$. Par exemple pour $V=120\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}=33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $Ma=0{,}1$ donc $Ma^2=0{,}01\ll 1$.

¤ Exercice 3 (fin)

a) On a établi en classe : $\boxed{P=P_0-\rho g\cos\alpha(y-e)}$.

b) L'équation (1) s'écrit finalement : $\dfrac{\mathrm{d}^2v_x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{\rho g\sin\alpha}{\eta}$. On intègre : $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{\rho g\sin\alpha}{\eta}y+B$ puis $v_x(y)=-\dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}y^2+By+C$.

Première condition aux limites : $v_x(0)=0$ car la vitesse d'un fluide visqueux au contact d'une paroi solide est égale à celle de cette paroi, donc nulle ici ; on en déduit $C=0$. Deuxième CL : la contrainte tangentielle de viscosité $\eta\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$ est nulle en $y=e$ (force de viscosité de l'air négligée), donc $-\dfrac{\rho g\sin\alpha}{\eta}e+B=0$ d'où $B=\dfrac{\rho g\sin\alpha}{\eta}e$. Finalement : $\boxed{\vec{v}(y)=\dfrac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}(2ey-y^2)\vec{e_x}}$.



Le profil de vitesse est parabolique, avec le maximum à la surface et le minimum nul sur le plan incliné.

c) $D_m=\displaystyle\iint_\Sigma\rho\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\int_{y=0}^{e}\int_{z=0}^{l}\rho\frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}(2ey-y^2)\vec{e_x}\cdot\vec{e_x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\rho^2 g\sin\alpha}{2\eta}l\left[ey^2-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{e}$ soit $\boxed{D_m=\dfrac{\rho^2 gle^3\sin\alpha}{3\eta}}$.

¤ Exercice 4

a) Par définition : $\vec{\Omega}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{v}\right)$. Pour $r<a$, $\vec{\Omega}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(r\omega\vec{e_\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(r^2\omega)}{\mathrm{d}r}\vec{e_z}$ soit $\boxed{\vec{\Omega}=\omega\vec{e_z}\ [r<a]}$. Pour $r>a$, $\vec{\Omega}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{a^2\omega}{r}\vec{e_\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(a^2\omega)}{\mathrm{d}r}\vec{e_z}$ soit $\boxed{\vec{\Omega}=\vec{0}\ [r>a]}$. Le vecteur tourbillon est localisé (et uniforme) dans un cylindre de rayon a.

b) Équation de Navier–Stokes : $\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}=\rho\vec{g}-\overrightarrow{\mathrm{grad}}P+\eta\Delta\vec{v}$, avec ici $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{0}$ (écoulement stationnaire), $\eta\Delta\vec{v}=\vec{0}$ (écoulement parfait), $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}=v_\theta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta\vec{e_\theta}\right)=\dfrac{v_\theta}{r}\left(-v_\theta\vec{e_r}\right)=-\dfrac{v_\theta^2}{r}\vec{e_r}$, $\rho\vec{g}=-\rho g\,\vec{e_z}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}P=\dfrac{\partial P}{\partial r}\vec{e_r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial\theta}\vec{e_\theta}+\dfrac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}$.

Projections : $-\rho\dfrac{v_\theta^2}{r}=-\dfrac{\partial P}{\partial r}$ (1) ; $0=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial\theta}$ donc P est indépendante de θ ; $0=-\rho g-\dfrac{\partial P}{\partial z}\Leftrightarrow\dfrac{\partial P}{\partial z}=-\rho g$ (2).

Pour trouver $P(r,z)$ on intègre d'abord (2) par rapport à z : $P(r,z)=-\rho gz+f(r)$. On dérive ceci par rapport à r : $\dfrac{\partial P}{\partial r}=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$. Et on identifie alors avec (1), soit $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=\rho\dfrac{v_\theta^2}{r}$ dans chaque domaine.

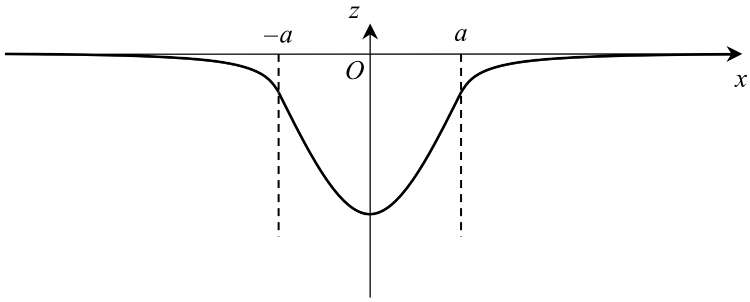
Pour $r>a$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=\rho\dfrac{a^4\omega^2}{r^3}$ donc $f(r)=-\dfrac{\rho a^4\omega^2}{2r^2}+A$, d'où $P(r,z)=-\rho gz-\dfrac{\rho a^4\omega^2}{2r^2}+A$. On trouve la constante A avec la condition aux limites à grande distance du tourbillon : $P(\infty,0)=P_0=A$ (surface libre), donc finalement $\boxed{P(r,z)=P_0-\rho gz-\dfrac{\rho a^4\omega^2}{2r^2}\ [r>a]}$.

Pour $r<a$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=\rho\dfrac{r^2\omega^2}{r}=\rho r\omega^2$ donc $f(r)=\dfrac{1}{2}\rho r^2\omega^2+B$, d'où $P(r,z)=-\rho gz+\dfrac{1}{2}\rho r^2\omega^2+B$. On trouve B par continuité en $r=a$: $P(a,z)=P_0-\rho gz-\dfrac{\rho a^4\omega^2}{2a^2}=-\rho gz+\dfrac{1}{2}\rho a^2\omega^2+B$ donc $B=P_0-\rho a^2\omega^2$ et $\boxed{P(r,z)=P_0-\rho gz+\rho\omega^2\left(\dfrac{1}{2}r^2-a^2\right)\ [r<a]}$.

c) La surface libre est la surface isobare $P(r,z)=P_0$.

Pour $r<a$, cela donne $\boxed{z=\dfrac{\omega^2}{g}\left(\dfrac{1}{2}r^2-a^2\right)\ [r<a]}$: c'est une portion de paraboloïde de révolution, de concavité vers le haut, de profondeur proportionnelle à ω^2.

Pour $r>a$, $\boxed{z=-\dfrac{a^4\omega^2}{2gr^2}\ [r>a]}$: c'est une surface de concavité vers le bas, et tendant asymptotiquement vers le plan (Oxy) à grande distance.



Le profil obtenu correspond bien à l'allure observée expérimentalement pour un tourbillon usuel.

Trois tourbillons dans l'eau, obtenus avec des vitesses angulaires croissantes

¤ Exercice 5

a) Voir cours.

b) L'écoulement étant incompressible et stationnaire, les débits volumique et massique sont conservés entre l'entrée et la sortie : $\boxed{\pi R_A^2 v_A=\pi R_B^2 v_B}$, donc $\boxed{v_B>v_A}$.

c) Les conditions sont réunies pour appliquer la relation de Bernoulli entre A et B, pris sur une même ligne de courant : $P_A+\rho\dfrac{v_A^2}{2}+\rho g z_A=P_B+\rho\dfrac{v_B^2}{2}+\rho g z_B$. En ordre de grandeur, $\rho g(z_A-z_B)\approx 10^3\times 10\times 10^{-1}=10^3$ Pa alors que $P_A\approx 10^5$ Pa donc on peut négliger ces termes, et il reste : $P_B-P_A=\rho\left(\dfrac{v_A^2}{2}-\dfrac{v_B^2}{2}\right)$ soit $\boxed{P_B-P_A=\rho\dfrac{v_A^2}{2}\left(1-\dfrac{R_A^4}{R_B^4}\right)}$ (<0).

d) Si $P_B<\Pi$, <u>l'eau se transforme en vapeur</u>, c'est-à-dire qu'on voit apparaître des bulles qui perturbent l'écoulement.

e) On veut maintenir $P_B=P_A+\rho\dfrac{v_A^2}{2}\left(1-\dfrac{R_A^4}{R_B^4}\right)>\Pi$, donc $\boxed{v_A<\sqrt{\dfrac{2(P_A-\Pi)R_B^4}{\rho(R_A^4-R_B^4)}}=v_{A,\max}}$. AN $\boxed{v_{A,\max}=0{,}57\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

Débit volumique maximal : $\boxed{D_{V,\max}=\pi R_A^2 v_{A,\max}}$. AN $\boxed{D_{V,\max}=1{,}8\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}=0{,}18\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}}$.

¤ Exercice 6

a) La fusée a perdu une masse Dt entre 0 et t, donc $\boxed{m(t)=M+m_0-Dt}$. À l'instant t, toute cette masse est dans la fusée et sa quantité de mouvement est donc $\vec{p}(t)=[M+m_0-Dt]\vec{v}(t)$. À l'instant $t+\mathrm{d}t$, la masse $M+m_0-Dt-D\mathrm{d}t$ restant dans la fusée a la vitesse $\vec{v}(t+\mathrm{d}t)$, tandis que la masse $D\mathrm{d}t$ éjectée a une vitesse $\vec{u}+\vec{v}(t+\mathrm{d}t)$ *(voir remarque)* par rapport au référentiel terrestre (loi de composition des vitesses), donc $\vec{p}(t+\mathrm{d}t)=[M+m_0-Dt-D\mathrm{d}t]\vec{v}(t+\mathrm{d}t)+D\mathrm{d}t\left[\vec{u}+\vec{v}(t+\mathrm{d}t)\right]=[M+m_0-Dt]\vec{v}(t+\mathrm{d}t)+D\mathrm{d}t\,\vec{u}$.

Donc $\mathrm{d}\vec{p}=[M+m_0-Dt]\vec{v}(t+\mathrm{d}t)+D\mathrm{d}t\,\vec{u}-[M+m_0-Dt]\vec{v}(t)$ soit $\boxed{\mathrm{d}\vec{p}=[M+m_0-Dt]\mathrm{d}\vec{v}+D\mathrm{d}t\,\vec{u}}$.

Remarque : pour la vitesse du bloc éjecté, on aurait pu prendre $\vec{u}+\vec{v}(t)$; dans ce cas on a un terme supplémentaire $D\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\vec{v}$, que l'on néglige car c'est un infiniment petit d'ordre 2.

b) TQM : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{P}\Leftrightarrow[M+m_0-Dt]\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+D\vec{u}=[M+m_0-Dt]\vec{g}$. L'accélération de la fusée est donc $\boxed{\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{g}-\dfrac{D}{M+m_0-Dt}\vec{u}}$.

Remarque : le TQM peut s'écrire $m(t)\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m(t)\vec{g}-D\vec{u}$, ce qui fait apparaître une « force de poussée » $\vec{F}=-D\vec{u}$.

Pour que la fusée puisse décoller, il faut que $\vec{a}$ soit initialement orienté vers le haut, soit : $\ddot{z}(0)=-g+\dfrac{D}{M+m_0}u>0$.

Avec les valeurs données : $\ddot{z}(0)=-9{,}8+400\times 2500/55000=+8{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}>0$ donc <u>la fusée peut bien décoller</u>.

c) $\ddot{z}(t)=-g+\frac{D}{M+m_0-Dt}u$ d'où $\dot{z}(t)=v(t)=-gt-u\ln[M+m_0-Dt]+A$. CI : $v(0)=-u\ln[M+m_0]+A=0$. Donc finalement : $\boxed{v(t)=-gt+u\ln\left(\frac{M+m_0}{M+m_0-Dt}\right)}$. On peut intégrer encore une fois (calcul lourd et non exigible !) avec la formule $(f\ln f-f)'=f'\ln f$: $z(t)=-g\frac{t^2}{2}+\frac{u}{D}\left([M+m_0-Dt]\ln[M+m_0-Dt]-[M+m_0-Dt]\right)+ut\ln[M+m_0]+B$. On trouve finalement B avec la CI : $z(0)=\frac{u}{D}\left([M+m_0]\ln[M+m_0]-[M+m_0]\right)+B=0$. Donc $\boxed{z(t)=-g\frac{t^2}{2}-\frac{u}{D}[M+m_0-Dt]\ln\left(\frac{M+m_0}{M+m_0-Dt}\right)+ut}$.

d) La combustion du carburant se termine à t_1 tel que $m(t_1)=m_0-Dt_1=0$ soit $\boxed{t_1=\frac{m_0}{D}}$. AN $\boxed{t_1=125\ \text{s}=2\ \text{min}\ 5\ \text{s}}$.

Alors $\boxed{v(t_1)=-g\frac{m_0}{D}+u\ln\left(1+\frac{m_0}{M}\right)}$. AN $\boxed{t_1=4800\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.

¤ **<u>Exercice 7</u>**

a) L'écoulement étant <u>incompressible</u>, il y a conservation du débit volumique, donc $A_{H^-}v_{H^-}=A_{H^+}v_{H^+}$, d'où $\boxed{v_{H^-}=v_{H^+}}$ puisqu'on a supposé $A_{H^-}=A_{H^+}=A_H$. De même on obtient $\boxed{A_g v_g=A_H v_H=A_d v_d}$.

b) Entre A_g et A_{H^-} : $P_0+\rho\frac{v_g^2}{2}+0=P_-+\rho\frac{v_H^2}{2}+0$. Entre A_{H^+} et A_d : $P_++\rho\frac{v_H^2}{2}+0=P_0+\rho\frac{v_d^2}{2}+0$. On élimine P_0 et $\rho\frac{v_H^2}{2}$ entre les deux : $P_+-\rho\frac{v_d^2}{2}=P_--\rho\frac{v_g^2}{2}$ ou encore $\boxed{\rho\left(v_g^2-v_d^2\right)=2\left(P_--P_+\right)}$.

Entre A_{H^-} et A_{H^+}, <u>l'écoulement n'est pas stationnaire</u> puisque l'hélice est en rotation.

c) On définit tout d'abord un système fermé à partir de la surface de contrôle Σ délimitée par les sections A_{H^-} et A_{H^+} : à l'instant *t*, le système comporte la masse de fluide dans Σ et la masse $D_m\,\mathrm{d}t=\rho A_H v_H\,\mathrm{d}t$ qui va entrer entre *t* et *t*+d*t* ; à l'instant *t*+d*t*, il comporte la masse de fluide dans Σ et la masse $\rho A_H v_H\,\mathrm{d}t$ qui est sortie entre *t* et *t*+d*t*. Bilan de quantité de mouvement : $\frac{\vec{p}(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t}=-\vec{F}+\vec{F_p}$ (l'action du poids étant négligée sur cet écoulement horizontal), soit $\vec{0}=-F\vec{e_x}+P_-A_H\vec{e_x}-P_+A_H\vec{e_x}$ (la force de pression sur la surface latérale étant nulle par symétrie), donc $\boxed{F=(P_--P_+)A_H=\frac{1}{2}\rho\left(v_g^2-v_d^2\right)A_H}$.

On procède de même entre les sections A_g et A_d : $D_m v_d\vec{e_x}-D_m v_g\vec{e_x}=-F\vec{e_x}+\vec{0}$ (surface entièrement entourée de la même pression P_0) donc $\boxed{F=D_m(v_g-v_d)}$ avec $D_m=\rho A_H v_H=\rho A_g v_g=\rho A_d v_d$. Si on divise membre à membre ces deux équations on obtient : $1=\frac{1}{2}\rho\frac{v_g+v_d}{D_m}A_H$ d'où $\boxed{v_H=\frac{v_g+v_d}{2}}$.

D'autre part, en éliminant maintenant v_d : $F=\frac{1}{2}\rho\left(v_g^2-(2v_H-v_g)^2\right)A_H$ soit finalement $\boxed{F=2\rho v_H(v_g-v_H)A_H}$.

d) Faisons maintenant un bilan d'énergie cinétique sur le fluide entre les sections A_{H^-} et A_{H^+} : $\frac{E_c(t+\mathrm{d}t)-E_c(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathcal{P}+\mathcal{P}_p$ soit $0=-\mathcal{P}+(P_--P_+)A_H v_H$ d'où $\mathcal{P}=(P_--P_+)A_H v_H=Fv_H$ soit $\boxed{\mathcal{P}=2\rho v_H^2(v_g-v_H)A_H}$.

e) Avec le paramètre u : $\mathcal{P}=2\rho v_g^3 A_H u^2(1-u)$. Puisque v_H, v_g et v_d sont positives, alors $\frac{1}{2}<u$, et d'autre part $u<1$ puisque F et $\mathcal{P}$ sont positives. Dans cet intervalle, la fonction $u^2(1-u)$ est maximale en $\boxed{u=\frac{2}{3}}$: alors $\boxed{F=\frac{4}{9}\rho v_g^2 A_H}$ et $\boxed{\mathcal{P}_{max}=\frac{8}{27}\rho v_g^3 A_H}$.

f) AN $\boxed{F=110\ \text{kN}}$ et $\boxed{\mathcal{P}_{max}=0{,}71\ \text{MW}}$.