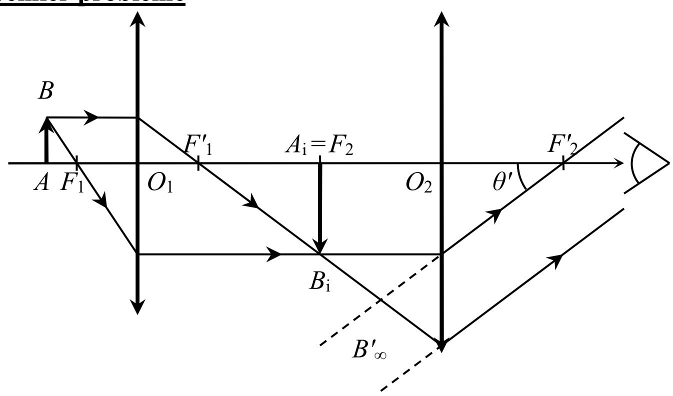
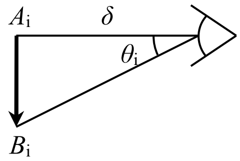
Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 3

¤ Premier problème

1.



2. L'objet pour l'oculaire est A_iB_i. Le grossissement commercial G_2 est donc $\frac{\theta'}{\theta_i}$ avec l'angle θ' indiqué sur la figure ci-contre, et θ_i l'angle sous lequel serait vu A_iB_i à l'œil nu à la distance δ (figure ci-dessous).
Dans les conditions de Gauss :



$$\theta' \approx \tan\theta' = \frac{A_iB_i}{f_2'},$$

$$\theta_i \approx \tan\theta_i = \frac{A_iB_i}{\delta} \quad \text{donc} \quad G_2 = \frac{\delta}{f_2'}$$

d'où $\boxed{f_2' = \frac{\delta}{G_2}}$. AN $\boxed{f_2' = 2{,}5\,\text{cm}}$.

3. Formule de grandissement de Newton (théorème de Thalès) : $\gamma_1 = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F_1'F_2}}{\overline{F_1'O_1}} = \frac{\Delta}{-f_1'}$. Donc $|\gamma_1| = \frac{\Delta}{f_1'}$ d'où $\boxed{f_1' = \frac{\Delta}{|\gamma_1|}}$.

AN $\boxed{f_1' = 0{,}40\,\text{cm}}$. De plus $\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_i}}{\overline{O_1A}} = \frac{f_1'+\Delta}{\overline{O_1A}}$ donc $\overline{O_1A} = \frac{f_1'+\Delta}{\gamma_1} (<0)$ soit $\boxed{O_1A = \frac{f_1'+\Delta}{|\gamma_1|} = \frac{f_1'(f_1'+\Delta)}{\Delta}}$. AN $\boxed{O_1A = 0{,}41\,\text{cm}}$.

4. Grossissement global : $G = \frac{\theta'}{\theta}$ avec $\theta \approx \tan\theta = \frac{AB}{\delta}$ (objet AB vu à l'œil nu), donc $G = \frac{A_iB_i}{f_2'}\frac{\delta}{AB}$ soit $\boxed{G = |\gamma_1| G_2}$. AN $\boxed{G = 400}$.

5. Notons $O_1 \xrightarrow{L_2} C$. Formule de Newton : $\overline{F_2O_1} \cdot \overline{F_2'C} = -f_2'^2$ avec $\overline{F_2O_1} = -\Delta - f_1'$ donc $\boxed{\overline{F_2'C} = \frac{f_2'^2}{\Delta + f_1'}}$. AN $\boxed{\overline{F_2'C} = 3{,}8\,\text{mm}}$.

Le rapport des diamètres est la valeur absolue du grandissement : $\frac{d_{co}}{d} = \frac{F_2'C}{f_2'}$ d'où $\boxed{d_{co} = d\frac{f_2'}{\Delta + f_1'}}$. AN $\boxed{d_{co} = 1{,}1\,\text{mm}}$.

Tous les rayons ayant traversé l'objectif passent ensuite à l'intérieur du cercle oculaire (son image) : pour voir une image bien lumineuse et complète (pas de perte des bords) on a donc intérêt à placer l'œil à cet endroit. [On remarque d'ailleurs que le cercle oculaire se trouve juste derrière le foyer image de l'oculaire, ce qui correspond à la position de l'œil indiquée dans l'énoncé.]
Le diamètre du cercle oculaire est inférieur à celui de la pupille de l'œil, ce qui permet bien de capter toute la lumière issue du microscope.

¤ Deuxième problème

0. Le premier terme est écrit par erreur $\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, l'écriture correcte est $\boxed{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}$ avec une dérivée partielle (et non particulaire).

1. $\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}$ est la dérivée locale de la densité volumique de quantité de mouvement (liée au fait que l'écoulement n'est pas stationnaire). $\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ est sa dérivée convective (liée au fait que l'écoulement n'est pas uniforme).
$-\overrightarrow{\text{grad}}\,P$ est l'équivalent volumique des forces de pression. $\eta\Delta\vec{v}$ est l'équivalent volumique des forces de viscosité.

2. L'écoulement est supposé stationnaire, donc le champ de vitesse est indépendant du temps. De plus on suppose qu'il y a invariance par rotation autour de l'axe (Oz), donc il est indépendant de l'angle θ. Enfin l'incompressibilité se traduit par $\text{div}\,\vec{v} = 0$, soit ici : $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ donc v est indépendant de z. Il reste finalement : $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_z}$. L'accélération au premier membre de l'équation de Navier–Stokes est alors : $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \vec{0} + v(r)\frac{\partial}{\partial z}v(r)\overrightarrow{u_z} = \vec{0}$. Il ne reste donc que $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \eta\Delta\vec{v}$ soit $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \eta\Delta\vec{v}}$.

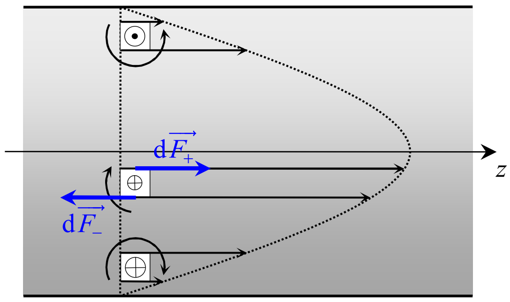
3. Le laplacien de la vitesse se réduit à : $\Delta\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\overrightarrow{u_z}$. Les projections de l'équation sont donc : $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$ (1) ; $\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} = 0$ (2) ; $\frac{\partial P}{\partial z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$ (3). Les deux premières montrent que P ne dépend ni de r, ni de θ, donc ne peut dépendre que de z, et $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$ également. Or le second membre de (3) ne peut dépendre que de r. On en déduit que les deux membres sont des constantes. $P(z)$ est donc une fonction affine, dont la pente s'obtient avec les valeurs extrêmes :
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{P(\ell) - P(0)}{\ell}$ soit $\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{\Delta P}{\ell}}$. Et $P(z) = -\frac{\Delta P}{\ell}z + A$, soit avec $P(0) = P_1 = A$: $\boxed{P(z) = -\frac{\Delta P}{\ell}z + P_1}$.

4. On intègre une première fois l'équation $\frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\Delta P}{\ell} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\Delta P}{\eta\ell}r$, ce qui donne : $r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{\eta\ell}\frac{r^2}{2}+A$, soit $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{\eta\ell}\frac{r}{2}+\frac{A}{r}$. On intègre encore une fois : $v(r) = -\frac{\Delta P}{\eta\ell}\frac{r^2}{4}+A\ln r+B$. En $r=0$, $\ln r$ tend vers l'infini alors que $v(0)$ reste finie, donc nécessairement $A=0$. En $r=a$, $v(a)=0=-\frac{\Delta P}{\eta\ell}\frac{a^2}{4}+B$. Finalement : $v(r)=\frac{\Delta P}{4\eta\ell}(a^2-r^2)$ soit $\boxed{\vec{v}=\frac{\Delta P}{4\eta\ell}(a^2-r^2)\overrightarrow{u_z}}$ (profil de vitesse parabolique, voir schéma ci-dessous).

5. Débit volumique : $D_v = \iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{\Delta P}{4\eta\ell}(a^2-r^2)\overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{u_z}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \;= \frac{\Delta P}{4\eta\ell}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a^2r-r^3)\,\mathrm{d}r = \frac{\Delta P}{4\eta\ell}\,2\pi\left[\frac{a^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{a}$

soit $\boxed{D_v = \frac{\pi a^4\Delta P}{8\eta\ell} = \frac{\pi d^4\Delta P}{128\eta\ell}}$. Le débit est en d^4 : si le diamètre est divisé par 2, le débit est divisé par 16 !

Vitesse débitante : $v_\mathrm{d} = \frac{D_v}{S} = \frac{D_v}{\pi a^2} = \frac{4D_v}{\pi d^2}$ soit $\boxed{v_\mathrm{d} = \frac{d^2\Delta P}{32\eta\ell}}$.



6. D'après le formulaire : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{u_\theta} = \frac{\Delta P}{2\eta\ell}r\,\overrightarrow{u_\theta}}$. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$ n'est pas nul, donc l'écoulement <u>n'est pas irrotationnel</u>.
Cela peut paraître surprenant au premier abord, car les lignes de courant sont toutes rectilignes et ne tournent pas. Mais ce rotationnel correspond à une <u>rotation des particules fluides</u> (représentées par des carrés sur le schéma ci-contre) autour d'un axe orthoradial, puisque le bas d'une particule ne va pas à la même vitesse que le haut (effet plus important au voisinage des parois car le gradient de vitesse y est plus grand). D'un point de vue dynamique, cette rotation est due aux <u>forces de viscosité de cisaillement</u>, qui créent un couple sur la particule (flèches bleues épaisses).

7. Pour utiliser la formule $\eta = \frac{\pi d^4\Delta P}{128 D_v\ell}$, il faut déterminer D_v et ΔP. Pour D_v on utilise le débit massique : $D_v = \frac{D_m}{\rho} = \frac{m}{\rho\tau}$. Pour ΔP on ne peut pas utiliser la relation de Bernoulli car l'écoulement n'est pas parfait. Faute de mieux, on peut supposer que l'écoulement est assez lent pour que le champ de pression reste le même qu'en statique : alors on a une pression $P_1 = P_\mathrm{atm}+\rho gh$ en entrée du tuyau, et $P_2 = P_\mathrm{atm}$ en sortie (à l'air libre), donc $\Delta P = \rho gh$. Finalement : $\boxed{\eta = \frac{\pi d^4\rho^2\tau gh}{128\ell m}}$. AN $\boxed{\eta = 1{,}12\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa\cdot s}\ \text{(ou Pl)}}$.
Cette viscosité est <u>12 % plus grande</u> que celle de l'eau pure : cette augmentation est due aux <u>fortes interactions attractives</u> entre les molécules d'eau et les ions de l'acide. Vitesse débitante : $\boxed{v_\mathrm{d} = \frac{D_v}{S} = \frac{4m}{\pi d^2\rho\tau}}$. AN $\boxed{v_\mathrm{d} = 0{,}58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.