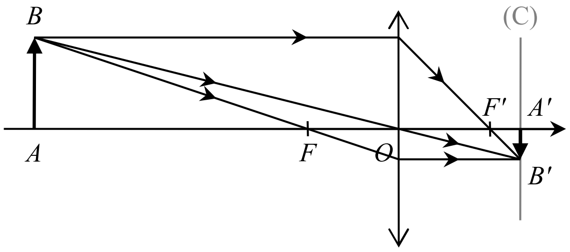
Corrigé du devoir test de physique n° 3

¤ Problème A

Q1.a) Les conditions de Gauss consistent à se limiter aux rayons paraxiaux : peu inclinés par rapport à l'axe optique, et rencontrant la lentille à proximité de l'axe optique.

Q1.b) C'est le diaphragme (D) qui laisse passer seulement ces rayons.

Q2.a)



Q2.b) Formule de grandissement (ou théorème de Thalès) : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, avec $\overline{OA'} = \dfrac{\overline{OA}\cdot f'}{\overline{OA}+f'} = \dfrac{-L\cdot f'}{-L+f'} \approx f'$ car $L \gg f'$.

Donc $\dfrac{\overline{A'B'}}{h} = \dfrac{f'}{f'-L} \approx -\dfrac{f'}{L}$ d'où $\boxed{\overline{A'B'} = h\dfrac{f'}{f'-L} \approx -h\dfrac{f'}{L}}$.

AN $\boxed{\overline{A'B'} = -13\text{ mm}}$ (ou -10 mm si on se limite à un chiffre significatif, comme dans les données).

Q3.a) Le capteur est positionné sur l'image : quand l'objet est à l'infini, $\boxed{d = \overline{OA'} = f' = 50\text{ mm}}$.

Q3.b) Quand l'objet s'éloigne à l'infini, la position de son image, donc du capteur, tend vers f', il suffit donc de prendre $d_{\min} = f'$ pour le photographier. En revanche, quand l'objet se rapproche du foyer *F*, l'image s'éloigne et sa position tend vers l'infini à droite, donc on ne peut plus y mettre le capteur si la position de l'image est plus éloignée que $d_{\max}$: il y a donc une distance minimale $L_{\min}$.

Q3.c) $d = \overline{OA'} \le d_{\max}$ équivaut à $\dfrac{L\cdot f'}{L-f'} \le d_{\max}$ d'où $\boxed{L \ge \dfrac{d_{\max} f'}{d_{\max}-f'} = L_{\min}}$. **Q3.d)** AN $\boxed{L_{\min} = 0{,}55\text{ m}}$.

Q4.a) Comme précédemment : $\boxed{\overline{A'B'} = h\dfrac{f_1'}{f_1'-L} \approx -h\dfrac{f_1'}{L} = -25\text{ mm}}$.

Q4.b) On peut donc voir l'arbre en entier si on tourne l'appareil en position « portrait » (longueur placée verticalement).

Q6.a) Les objets et images sont : $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$. On peut toujours faire l'approximation que l'objet est à l'infini (car $L \gg f_1'$), donc $\overline{O_1A_1} \approx f_1'$. Alors $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}$ soit $\boxed{\overline{O_2A_1} = -e + f_1'}$.

Q6.b) La position de $A'B'$ est donnée par : $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{1}{\overline{O_2F_2'}}$ d'où $\overline{O_2A'} = \dfrac{\overline{O_2F_2'}\times\overline{O_2A_1}}{\overline{O_2F_2'}+\overline{O_2A_1}} = \dfrac{f_2'(f_1'-e)}{f_2'+f_1'-e}$. Pour que l'image $A'B'$ soit réelle, il faut que $\overline{O_2A'} > 0$. Sachant que $f_2' < 0$, pour que la fraction soit positive on doit avoir, soit $e > f_1'$ et $e < f_2' + f_1'$ (c'est impossible, puisque $f_2' + f_1' < f_1'$) ; soit $e < f_1'$ et $e > f_2' + f_1'$, ce qui donne l'intervalle possible pour *e* : $\boxed{f_1' + f_2' < e < f_1'}$.

Q6.c) On a bien $\boxed{5\text{ cm} < 8\text{ cm} < 10\text{ cm}}$.

Q7.a) Si *d* est définie à partir de la deuxième lentille : $d = \overline{O_2A'} = \dfrac{f_2'(f_1'-e)}{f_2'+f_1'-e}$. AN $\boxed{d = 3{,}3\text{ cm}}$. (Sinon, ajouter *e*, soit $d = 11{,}3$ cm).

Q7.b) Les grandissements des deux lentilles se multiplient : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$. Avec la formule de grandissement :

$\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \times \dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B'}}{h} = \dfrac{f_1'}{-L} \times \dfrac{d}{f_1'-e} = \dfrac{f_1'}{-L} \times \dfrac{f_2'}{f_2'+f_1'-e}$ d'où $\boxed{\overline{A'B'} = -\dfrac{hf_1'f_2'}{L(f_2'+f_1'-e)}}$. AN $\boxed{\overline{A'B'} = -42\text{ mm}}$.

Q7.c) Ce téléobjectif n'est manifestement pas équivalent à l'objectif simple de 100 mm, il est meilleur : il donne une image 1,7 fois plus grande que l'autre, mais en ayant un encombrement seulement 1,1 fois plus grand : $e + d = 11{,}3$ cm contre $d_{\min} = 10$ cm.

Q9.a) Loi de Snell–Descartes : $\boxed{n\sin i = \sin r}$.

Q9.b) On décompose cette distance : $OF' = OK + KF'$. Dans le triangle rectangle *BCK* : $CB = R$, $CK = R\cos i$ et $BK = R\sin i$.
Alors $OK = OS - KS = OS - CS + CK = e - R + R\cos i$, et dans le triangle rectangle *BF'K*, dont l'angle en *F'* est $r - i$: $\tan(r-i) = \dfrac{BK}{KF'}$ d'où $KF' = \dfrac{R\sin i}{\tan(r-i)}$. Finalement, on obtient bien $\boxed{OF' = e - R(1-\cos i) + \dfrac{R\sin i}{\tan(r-i)}}$.

Q10.a) Les rayons incidents parallèles à l'axe définissent un point objet M_∞ à l'infini sur l'axe, et le tracé des rayons a pour but de trouver son image, sur l'axe également. Or la position du point *F'* trouvé dépend de *i* donc de *h*, c'est-à-dire qu'elle n'est pas la même pour tous les rayons : il n'y a donc pas de point image et la lentille n'est pas rigoureusement stigmatique.

Q10.b,c) On suppose $i \ll 1$ et $r \ll 1$, donc $\sin i \approx i$, $\sin r \approx r$, $\tan(r-i) \approx r - i$ et $\cos i \approx 1$. La loi de Snell–Descartes donne alors $ni \approx r$, d'où $OF' \approx e - 0 + \dfrac{Ri}{r-i} \approx e + \dfrac{R}{n-1}$. Si on suppose aussi $e \ll R$, alors $\boxed{OF' \approx \dfrac{R}{n-1}}$. Dans cette approximation, *F'* a la même position pour tous les rayons, il s'agit donc bien d'un point image et la lentille est approximativement stigmatique.

Q11.a) $(OSF') = (OS) + (SF') = n\times e + 1\times SF'$. Or $SF' = OF' - OS = \dfrac{R}{n-1} - e$. Alors $\boxed{(OSF') = (n-1)e + \dfrac{R}{n-1}}$. (Il y a donc une erreur d'énoncé, il faut lire *R* et non *r* !)

Q11.b) Les rayons incidents, issus du point objet M_∞, étant parallèles entre eux, d'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons, donc planes et orthogonales à l'axe. Alors *A* et *O* sont sur la même surface d'onde, donc $(M_\infty A) = (M_\infty O)$. De plus, pour les deux points conjugués M_∞ et F', $(M_\infty ABF') = (M_\infty OSF')$. Donc $\boxed{(ABF') = (OSF')}$.

¤ Problème B

Q1. Les zones d'écoulement laminaire sont celles où on distingue clairement des lignes de courant : devant le véhicule, au-dessus et au-dessous notamment. Les zones d'écoulement turbulent sont constituées de nombreux petits tourbillons aléatoires, difficilement visibles : ce sont les zones grisées juste derrière chaque véhicule. Le coefficient aérodynamique dépend de la forme de l'obstacle, et pour un obstacle de forme donnée, il dépend du nombre de Reynolds.

Q2. Le châssis de la voiture est soumis à son poids, à la réaction de la route (uniquement normale si on néglige les frottements), à la force de traînée et au couple fourni par le moteur. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{N}) + \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}_{(\text{moteur})}$ avec $\mathcal{P}(\vec{P}) = \mathcal{P}(\vec{N}) = \vec{0}$ (forces orthogonales au mouvement) et $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{V} = -\dfrac{1}{2}C_x\rho_0 S V^3$. De plus $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = 0$ lorsque le véhicule roule à sa vitesse maximale, d'où $0 = -\dfrac{1}{2}C_x\rho_0 S V_{\max}^3 + \mathcal{P}$. On en déduit : $\boxed{V_{\max} = \left(\dfrac{2\mathcal{P}}{C_x\rho_0 S}\right)^{1/3}}$. AN $\boxed{V_{\max} = 50\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 180\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}}$.

Q3. La distance $D = 100$ km est parcourue en une durée $T = D/V$. La consommation en carburant sur cette durée est proportionnelle à l'énergie reçue par le moteur, donc à celle qu'il fournit, donc à sa puissance multipliée par le temps. Or la question précédente donnait une puissance en V^3 donc le produit par T donne une expression en V^2, soit $\boxed{x = 2}$.

Q4. En régime stationnaire, un bilan de masse pour la surface de contrôle $A'B'CD$ s'écrit : $0 = +\mathrm{d}m_1 - \mathrm{d}m_2$ soit $\boxed{\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2}$. Ceci est équivalent à $\rho S_e v_1\,\mathrm{d}t = \rho S_e v_2\,\mathrm{d}t$, soit $\boxed{v_1 = v_2}$ (en *norme* uniquement, les vecteurs vitesses étant bien sûr différents).

Q5. Bilan de quantité de mouvement (TQM) : $\dfrac{\vec{p}_{CDC'D'} + \vec{p}_{A'B'CD} - \vec{p}_{A'B'CD} - \vec{p}_{ABA'B'}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow \dfrac{\rho S_e v_1\,\mathrm{d}t\,\vec{v_2} + \vec{0} - \rho S_e v_1\,\mathrm{d}t\,\vec{v_1}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}$ soit finalement $\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \rho S_e v_1\left(\vec{v_2} - \vec{v_1}\right)}$.

Q6. On en déduit $\vec{F}_{\text{air}\to\text{véhicule}} = -\vec{F}_{\text{ext}} = \rho S_e v_1\left(\vec{v_1} - \vec{v_2}\right) = \rho S_e v_1^2\left(\vec{u_1} - \vec{u_2}\right)$. Projection sur l'axe (Oz) vertical ascendant : $\boxed{F_{z,\text{air}\to\text{véhicule}} = -\rho S_e v_1^2\left(\sin\alpha + \sin\beta\right) < 0}$. Quelles que soient les valeurs des angles α et β, cette force est toujours orientée vers le bas, c'est-à-dire qu'elle plaque le véhicule au sol. Cela permet d'éviter le risque de décollement à grande vitesse, qui serait très dangereux.

¤ Problème C

Q32. $\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$ est la dérivée convective de la densité volumique de quantité de mouvement (liée au fait que l'écoulement n'est pas uniforme). $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$ est l'équivalent volumique des forces de pression. $\eta\Delta\vec{v}$ est l'équivalent volumique des forces de viscosité.

Q33. Nombre de Reynolds : $\boxed{Re = \dfrac{\rho_e h v_x}{\eta_e}}$. AN $\boxed{Re = 0{,}01 \ll 1}$. Cela signifie que l'écoulement est très visqueux, c'est-à-dire que le terme de diffusion visqueuse de quantité de mouvement, $\eta\Delta\vec{v}$, est largement prépondérant devant le terme de convection $\rho\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$. On peut alors négliger ce dernier et écrire simplement : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \eta\Delta\vec{v}}$.

Q34. Par ailleurs, $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = v_x(z)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(v_x(z)\vec{u_x}\right)$ soit $\boxed{\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \vec{0}}$ puisque $v_x(z)$ et $\vec{u_x}$ sont indépendants de x.

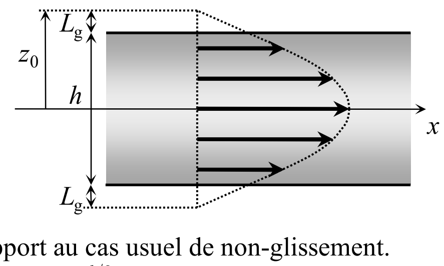
Q35. $\Delta\vec{v} = \Delta v_x(z)\vec{u_x} = \dfrac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}z^2}\vec{u_x}$. Les projections de l'équation de Navier–Stokes sur $\vec{u_y}$ et $\vec{u_z}$ donnent donc $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0$: P est indépendante de y et de z. Et la projection sur $\vec{u_x}$ donne : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \eta\dfrac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}z^2}}$ (on met des d droits plutôt que des d ronds).

Q36. Cette équation équivaut à $\eta\dfrac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}z^2} = -K = \text{cte}$. On intègre par rapport au temps : $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{K}{\eta}z + A$ puis $v_x(z) = -\dfrac{K}{2\eta}z^2 + Az + B$.

Conditions aux limites : $v_x\left(+\dfrac{h}{2}\right) = -\dfrac{K}{2\eta}\dfrac{h^2}{4} + A\dfrac{h}{2} + B = -L_g\left(-\dfrac{K}{\eta}\dfrac{h}{2} + A\right)$ (1) et $v_x\left(-\dfrac{h}{2}\right) = -\dfrac{K}{2\eta}\dfrac{h^2}{4} - A\dfrac{h}{2} + B = +L_g\left(+\dfrac{K}{\eta}\dfrac{h}{2} + A\right)$ (2).

(1)+(2) $\Leftrightarrow -\dfrac{K}{2\eta}\dfrac{h^2}{2} + 2B = L_g\dfrac{K}{\eta}h$ d'où $B = \dfrac{Kh}{2\eta}\left(L_g + \dfrac{h}{4}\right)$. (1)−(2) $\Leftrightarrow Ah = -2L_g A$ d'où $A = 0$. Donc $\boxed{v_x(z) = \dfrac{KhL_g}{2\eta} + \dfrac{K}{2\eta}\left(\dfrac{h^2}{4} - z^2\right)}$.

Q37. $v_x(z_0) = \dfrac{KhL_g}{2\eta} + \dfrac{K}{2\eta}\left(\dfrac{h^2}{4} - z_0^2\right) = 0$ équivaut à $\boxed{z_0 = \pm\sqrt{hL_g + \dfrac{h^2}{4}}}$. Pour $L_g \ll h$, $|z_0| = \dfrac{h}{2}\sqrt{1 + \dfrac{4L_g}{h}} \approx \dfrac{h}{2}\left(1 + \dfrac{2L_g}{h}\right) = \dfrac{h}{2} + L_g$ soit $\boxed{L_g = |z_0| - \dfrac{h}{2}}$.



Les ordonnées z_0 étant en dehors de l'écoulement, la vitesse ne s'annule nulle part réellement. La longueur de glissement représente la distance au-delà des parois du canal où la vitesse s'annulerait théoriquement : c'est une sorte de décalage des parois par rapport au cas usuel de non-glissement.

Q38. $D_v = \iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \int_{y=0}^{\ell}\int_{z=-h/2}^{+h/2}\left[\dfrac{KhL_g}{2\eta} + \dfrac{K}{2\eta}\left(\dfrac{h^2}{4} - z^2\right)\right]\vec{u_x}\cdot\vec{u_x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \dfrac{K}{2\eta}\ell\left[\left(hL_g + \dfrac{h^2}{4}\right)z - \dfrac{z^3}{3}\right]_{z=-h/2}^{+h/2} = \dfrac{K}{2\eta}\ell\left(h^2L_g + \dfrac{h^3}{4} - \dfrac{h^3}{12}\right)$

soit finalement $\boxed{D_v = \dfrac{K\ell h^2}{2\eta}\left(L_g + \dfrac{h}{6}\right)}$.

Q39. $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -K = \text{cte}$ donc $P(x) = -Kx + P(0)$. Alors $P(L) = -KL + P(0)$, d'où $\boxed{K = \frac{P(0)-P(L)}{L} = \frac{\Delta P}{L}}$.

Q40. On peut donc poser $\Delta P = R_\mathrm{h} D_v$ avec $\boxed{R_\mathrm{h} = \frac{2\eta L}{\ell h^2 \left(L_\mathrm{g} + h/6\right)}}$. Cette formule est l'analogue de la loi d'Ohm $U = RI$, soit $\Delta V = RI$ pour un dipôle ohmique de résistance (électrique) R traversé par le débit de charges I.

Q41. En l'absence de glissement on aurait $R_\mathrm{h,ng} = \frac{12\eta L}{\ell h^3}$, donc $\boxed{\frac{R_\mathrm{h}}{R_\mathrm{h,ng}} = \frac{h/6}{L_\mathrm{g} + h/6}}$. Pour $\frac{L_\mathrm{g}}{h} = 0,5$ on obtient $\boxed{\frac{R_\mathrm{h}}{R_\mathrm{h,ng}} = 0,25}$.

Le glissement du fluide sur les parois permet donc au canal de résister quatre fois moins à l'écoulement qu'en l'absence de glissement, c'est-à-dire d'avoir un débit quatre fois plus grand pour une même perte de charge.