Exercices du chapitre Op3

Applications de l'expérience des trous de Young

1. Mesure de l'épaisseur d'une lame

On réalise le dispositif des trous de Young avec deux trous quasi ponctuels séparés de $\ell = 2{,}0$ cm, éclairés par une source ponctuelle S monochromatique ($\lambda = 589$ nm) placée au foyer objet principal d'une lentille L_1, l'observation étant faite sur un écran placé dans le plan focal image (Oyz) d'une lentille L_2, de focale $f_2' = 2{,}0\ \mathrm{m} \gg \ell$. Les deux trous sont symétriques par rapport à l'axe optique (Ox) des deux lentilles. L'ensemble est placé dans l'air, assimilé au vide (indice 1).

a) Déterminer la différence de marche entre les deux rayons interférant en un point $M(y,z)$ de l'écran. En déduire la figure d'interférences (forme des franges et position de la frange brillante d'ordre m). Calculer l'interfrange.

Sur le trajet des rayons passant par le trou du haut, on place perpendiculairement à l'axe optique une lame mince transparente, d'indice n, d'épaisseur e, de faces planes et parallèles.

b) Déterminer la nouvelle différence de marche en M. En déduire que l'interfrange est inchangée, et déterminer de quelle longueur la figure a été translatée (et dans quel sens).

D'après la formule précédente, si on peut mesurer le déplacement des franges (par exemple celui de la frange d'ordre 0), et si on connaît l'indice de la lame, on pourra en déduire la valeur de son épaisseur e. Mais si toutes les franges sont identiques, comment reconnaître la frange d'ordre 0 ?

La solution est d'utiliser une source de lumière blanche, c'est-à-dire comportant une infinité de longueurs d'onde différentes, dans un intervalle $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ de valeur centrale λ_c.

On suppose tout d'abord que la lame est *non dispersive*, c'est-à-dire que son indice n est indépendant de la longueur d'onde.

c) La position de la frange d'ordre 0 est-elle la même pour toutes les longueurs d'onde ? Les positions des franges d'ordres m non nuls sont-elles les mêmes pour toutes les longueurs d'onde ? En déduire comment on peut reconnaître la frange d'ordre 0, et justifier son nom de *frange achromatique*.

d) On mesure la position de la frange achromatique et on trouve $z_0' = 8{,}9$ mm. En supposant que l'indice de la lame est $n = 1{,}53$ pour toutes les longueurs d'onde, calculer son épaisseur e.

En réalité, une lame de verre est dispersive, son indice variant en fonction de la longueur d'onde selon la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

avec deux constantes a et b caractéristiques du verre utilisé.

Dans ce cas, le résultat de la question c n'est plus valable. Mais on peut encore trouver une frange dont l'ordre ne dépend pratiquement pas de la longueur d'onde, c'est-à-dire telle que :

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_c} = 0 \qquad (1).$$

e) Cette frange est encore appelée frange achromatique. Mais quelle est la différence entre cette frange achromatique et celle de la question c ?

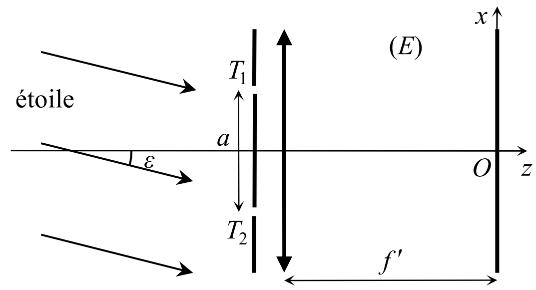
f) En utilisant la formule (1), calculer la position z_a' de la frange achromatique en fonction de l'épaisseur e de la lame et de a, b, λ_c, ℓ et f_2'.

g) On mesure pour cette lame un indice $n(\lambda_c) = 1{,}530$ pour $\lambda_c = 550{,}0$ nm et $n(\lambda_{\max}) = 1{,}497$ pour $\lambda_{\max} = 700{,}0$ nm.

En déduire les coefficients a et b, puis la valeur de z_a' si l'épaisseur e est celle calculée à la question d. Comparer z_a' à la valeur z_0' donnée à la question d et commenter.

2. Séparation d'une étoile double

On considère une lunette astronomique dont l'objectif est constitué d'une lentille convergente de focale $f' = 50$ cm. On place devant l'objectif un écran percé de deux trous identiques distants de a. L'air est assimilé au vide.



a) On observe une étoile assimilée à une source ponctuelle à l'infini, dont la direction fait un angle ε avec l'axe optique. Un filtre permet d'isoler dans son spectre la radiation de longueur d'onde $\lambda = 550$ nm. Déterminer la figure d'interférences observée dans le plan focal de l'objectif (forme des franges, position de la frange d'ordre 0, interfrange).

b) L'étoile visée est maintenant une étoile double, constituée de deux étoiles quasi ponctuelles très proches, dans des directions d'angles ε et $-\varepsilon$ avec l'axe optique ; on suppose qu'elles émettent de la lumière de même intensité pour cette raie spectrale. Donner sans calcul les caractéristiques de la figure d'interférences donnée par la deuxième étoile. En déduire, par un raisonnement qualitatif, pour quelles valeurs a_m de l'écartement a les franges d'interférences disparaissent complètement.

c) Pour vérifier ce résultat par le calcul direct, écrire les expressions des intensités $I_+(x)$ et $I_-(x)$ dues aux deux étoiles, et en déduire l'intensité résultante $I(x)$. Calculer alors le contraste de la figure d'interférences et retrouver les valeurs précédentes des a_m.

d) Dans le dispositif utilisé, on peut faire varier a à partir de 0, et on note a_0 la plus petite valeur pour laquelle on observe le brouillage total des franges. Déterminer a_0 pour deux étoiles séparées par $2{,}0''$ (2,0 secondes d'arc).

Trous ou fentes multiples

3. Réseau de diffraction : intensité et direction des maxima

Un réseau plan de N fentes fines parallèles, de période a (le pas du réseau), est éclairé par une onde plane monochromatique (longueur d'onde λ) sous l'angle d'incidence i. On observe les interférences « à l'infini » dans la direction d'angle θ par rapport à la normale au plan du réseau. (Les angles sont orientés à partir de la normale au réseau.)

L'ensemble est placé dans l'air, d'indice n_a.

a) Montrer que la différence de marche entre deux rayons passant par deux fentes consécutives, et interférant à l'infini, est : $\quad \delta = n_a a (\sin\theta - \sin i)$

et en déduire le déphasage φ entre ces deux ondes.

b) Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A}_n$ de l'onde passant par la n-ième fente en fonction de l'amplitude $\underline{A}_1$, de n et de φ. Quel type de suite forment les $\underline{A}_n$?

c) Calculer l'amplitude complexe résultante, puis l'intensité résultante I en fonction de I_0 (intensité d'une seule onde), de N et de φ.

d) Déterminer les valeurs de φ donnant un maximum d'intensité, ainsi que celles donnant une intensité nulle. Tracer l'allure de la courbe $I(\varphi)$ pour $N=4$. Quel est l'intérêt d'augmenter le nombre de fentes ?

e) On note θ_m les angles correspondant aux maxima d'intensité, m étant un entier (appelé *ordre de diffraction*). Déterminer la relation (1) entre $\sin\theta_m$, $\sin i$, m, a et λ.

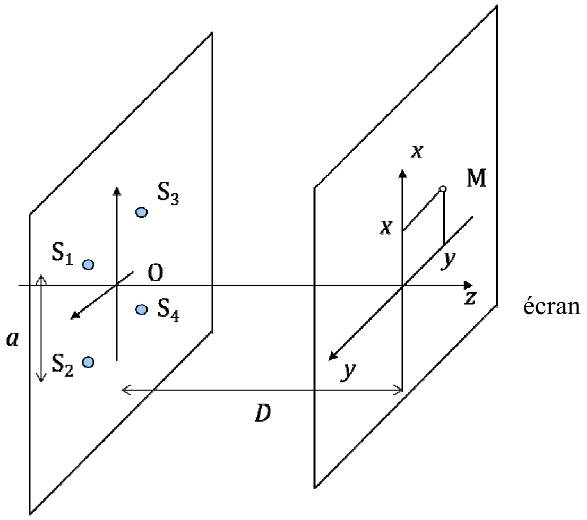
f) Avec une longueur d'onde $\lambda = 546{,}1$ nm, on a observé des maxima d'intensité pour les angles θ suivants :
$-63°\,39'$, $-36°\,40'$, $-17°\,24'$, $0°\,0'$, $17°\,22'$, $36°\,43'$, $63°\,38'$.
Quel est l'angle d'incidence ? Calculer le pas du réseau a.

On note $D_m = \theta_m - i$ la déviation du rayon à l'ordre m, et on cherche comment varie D_m en fonction de l'incidence i.

g) Écrire la différentielle de la relation (1), et en déduire $\dfrac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}i}$. Montrer alors que pour m non nul, D_m est minimale pour $\theta_m = -i$, et en déduire la relation : $\sin\dfrac{D_{m,\min}}{2} = \dfrac{m\lambda}{2a}$.

4. Ensemble de quatre trous

Un écran opaque est percé de quatre petits trous identiques S_1, S_2, S_3, S_4, aux quatre sommets d'un carré de côté a.



Ces trous sont éclairés par une onde plane de longueur d'onde λ, en incidence normale. On observe les interférences sur un écran situé à une grande distance D.

a) Déterminer, en un point M de l'écran, les quatre déphasages que l'on aurait entre une onde passant par un trou fictif situé en O, au centre du carré, et l'onde passant par chacun des trous S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Écrire l'amplitude complexe $\underline{A}_i(M)$ de l'onde passant par S_i en fonction de l'amplitude $\underline{A}_0(M)$ de l'onde (fictive) passant par O.

c) Déterminer l'éclairement sur l'écran en fonction des coordonnées (x, y) de M.

d) Préciser le lieu des points où l'éclairement est nul, puis le lieu des points où l'éclairement est maximal. Représenter graphiquement la figure obtenue.

e) Comment la figure serait-elle modifiée si on avait un rectangle de côtés a et b avec $a < b$?

f) Par analogie avec le cas des réseaux de fentes, deviner comment la figure d'interférences serait modifiée si on remplace les quatre trous par un réseau périodique carré (ou rectangulaire) d'un très grand nombre de trous. Voyez-vous une application concrète de ce type de situation ?

☞ *Réponses partielles*

1. d) $e = \dfrac{\ell z'_0}{(n-1)f'_2} = 0{,}17$ mm. f) $z'_\mathrm{a} = \dfrac{f'_2}{\ell}\left(a - 1 + \dfrac{3b}{\lambda_\mathrm{c}^2}\right)e$.

2. b) $a_m = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2\varepsilon}$. **3.** c) $\underline{A} = \underline{A}_1 \dfrac{1-\exp(jN\varphi)}{1-\exp(j\varphi)}$, $I = I_0 \dfrac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2\varphi/2}$. g) $\dfrac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}i} = \dfrac{\cos i}{\cos\theta_m} - 1$.

4. a) $\delta_{1/0} \approx n_\mathrm{a}\dfrac{a^2/2 - ax - ay}{2D}$, etc.