

Corrigé du devoir test de physique n° 4

☐ **Premier problème** (Centrale-Supélec MP 2021)

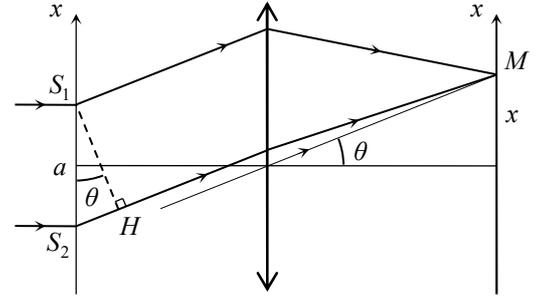
Q18. Les deux rayons qui interfèrent en M sont parallèles entre eux avant la lentille, et font un angle θ avec l'axe optique (petit dans les conditions de Gauss).

$\delta(M) = (S_\infty M)_2 - (S_\infty M)_1 = (S_\infty S_2) - (S_\infty S_1) + (S_2 M) - (S_1 M)$. Or les rayons issus de S_∞ forment un faisceau parallèle : d'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons, donc planes. Ainsi S_1 et S_2 sont sur une même surface d'onde, donc par définition d'une surface d'onde, $(S_\infty S_2) = (S_\infty S_1)$. Il reste alors $\delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M)$.

Pour le déterminer, on ne peut pas procéder par simple lecture géométrique, car on ne sait pas quelle est l'épaisseur de lentille traversée par chaque rayon.

Imaginons alors que M soit une source ponctuelle. D'après la loi de retour inverse de la lumière, le trajet des rayons serait le même dans l'autre sens, ils formeraient donc un faisceau parallèle à gauche de la lentille. Et d'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde à gauche de la lentille seraient orthogonales aux rayons, donc planes : ainsi les chemins optiques (MS_1) et (MH) seraient égaux. Si on revient au sens réel des rayons, $(S_1 M) = (HM)$. Alors $\delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M) = (S_2 H) + (HM) - (S_1 M) = (S_2 H)$ soit

$$\delta(M) = 1 \times S_2 H = a \sin \theta \approx a \theta. \text{ De plus } \theta \approx \tan \theta = \frac{x}{f'}, \text{ d'où } \delta(M) = \frac{ax}{f'}.$$



Q19. Le signal lumineux en M est, en notation complexe : $\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) = a \exp(j(\omega t - \varphi_1(M))) + a \exp(j(\omega t - \varphi_2(M))) = a \exp(j\omega t) [\exp(-j\varphi_1) + \exp(-j\varphi_2)]$. L'intensité est donc $I(M) = K \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t) = Ka^2 [2 + \exp(j(\varphi_2 - \varphi_1)) + \exp(j(\varphi_1 - \varphi_2))]$ soit $I(M) = 2Ka^2 [1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)] = 2I_1 [1 + \cos \varphi(M)]$ en notant I_1 l'intensité d'un seul faisceau et $\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$. Or

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \text{ donc } I(M) = 2I_1 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) \right].$$

Les franges d'interférences sont des courbes $\varphi(M) = \text{cte}$, soit $x = \text{cte}$: elles sont rectilignes, parallèles à l'axe horizontal (Oy).

Q20. Franges brillantes : $\varphi(M) = 2m\pi$ (m entier) soit $x_m = m \frac{\lambda f'}{a}$. L'interfrange est $i = x_{m+1} - x_m$ soit $i = \frac{\lambda f'}{a}$. AN $i = 1,0 \text{ mm}$.

Q21. Pour une variation de longueur d'onde $\Delta\lambda$, l'interfrange varie de $\Delta i = \frac{\Delta\lambda f'}{a}$. AN pour $\Delta\lambda = 20 \text{ pm}$: $\Delta i = 40 \text{ nm} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$. Pour détecter une telle variation de i , il faudrait la mesurer avec une précision de 0,004 %, ce qui est généralement impossible.

Q22. En raisonnant comme précédemment, on obtient toujours $\delta = a \sin \theta$, donc $\varphi = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$ (sans supposer θ petit).

Q23. Le signal lumineux total est maintenant : $\underline{s}(M, t) = \sum_{q=1}^N \underline{s}_q(M, t) = \sum_{q=1}^N a \exp(j(\omega t - \varphi_q(M))) = a \exp(j\omega t) \sum_{q=1}^N \exp(-j\varphi_q(M))$ soit $\underline{s}(M, t) = a \exp(j\omega t) \sum_{q=1}^N \exp(-j(q-1)\varphi)$. C'est la somme de N termes d'une suite géométrique de premier terme $a \exp(j\omega t)$ et de

$$\text{raison } \exp(-j\varphi). \text{ Pour } \varphi \neq 2m\pi : \underline{s}(M, t) = a \exp(j\omega t) \frac{1 - \exp(-jN\varphi)}{1 - \exp(-j\varphi)} = a \exp(j\omega t) \exp(-j(N-1)\varphi/2) \frac{\exp(jN\varphi/2) - \exp(-jN\varphi/2)}{\exp(j\varphi/2) - \exp(-j\varphi/2)}$$

$$\text{soit } \underline{s}(M, t) = a \exp(j\omega t) \exp(-j(N-1)\varphi/2) \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}. \text{ Finalement l'intensité en } M \text{ est : } I(M) = I_1 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} \text{ Pour } \varphi = 2m\pi, \text{ la}$$

raison vaut 1 donc $\underline{s}(M, t) = Na \exp(j\omega t)$ et $I(M) = N^2 I_1$, ce qui prolonge la fonction précédente par continuité.

Cette fonction est justement maximale pour $\varphi = 2m\pi$ (quand le dénominateur tend vers 0), soit $\varphi = 2p\pi$ avec l'ordre d'interférences p entier ; dans ce cas toutes les ondes sont en phase, les interférences sont constructives. Pour $p = 1$: $\frac{a \sin \theta}{\lambda} = 1$ d'où $\theta_1 = \arcsin \frac{\lambda}{a}$.

Q24. AN avec $1/a = 1800 \text{ mm}^{-1}$: $\theta_1 = 64^\circ$. Cet angle est très grand et ne permet plus d'être dans les conditions de Gauss.

Q25. De part et d'autre d'un maximum, l'intensité s'annule pour $N \frac{\varphi}{2} = Np\pi \pm \pi$ soit $\varphi = 2p\pi \pm \frac{2\pi}{N}$: la demi-largeur d'un pic est

$$\text{donc } \Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}. \text{ Si } N \text{ est assez grand pour avoir } \Delta\varphi \ll 1, \text{ on peut faire un calcul différentiel : } \Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} \cos \theta \Delta\theta = \frac{2\pi}{N} \text{ d'où}$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Na \cos \theta_1} = \frac{\lambda}{\ell \cos \theta_1}. \text{ AN } \Delta\theta = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 4,7''.$$

Q26. On peut encore faire du calcul différentiel : $a \sin \theta_1 = \lambda$ d'où $a \cos \theta_1 d\theta_1 = d\lambda$ que l'on assimile à $a \cos \theta_1 \times (\theta'_1 - \theta_1) = \lambda' - \lambda$. La condition $|\theta'_1 - \theta_1| \geq \Delta\theta$ donne donc $|\lambda' - \lambda| \geq \frac{\lambda}{N}$ soit $P = \frac{\lambda}{N}$.

Q27. AN avec $N = \ell/a = 90000$: $P = 5,5 \text{ pm}$. En fait les pics peuvent être plus larges, donc la résolution moins bonne, à cause de la diffraction par la monture des lentilles utilisées, ou encore à cause de la largeur spectrale de chaque raie.

□ **Deuxième problème** (CCINP PC 2021)

Q25. Une frange est un ensemble de points ayant le même ordre d'interférences p , correspondant à la même différence de marche δ , donc à la même épaisseur de goutte traversée, donc à la même valeur de r : c'est un cercle centré sur (Oz) .

Q26. On peut former l'image du plan du substrat sur un écran avec une lentille convergente.

Q27. $e(r) = HK = OK - OH$. Dans le triangle rectangle OKP : $OK^2 + r^2 = R^2$ d'où

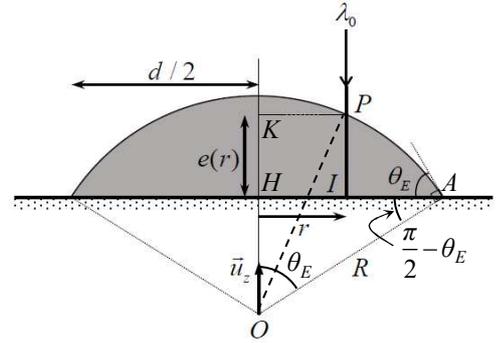
$$OK = \sqrt{R^2 - r^2}. \text{ Et dans le triangle rectangle } OHA : OH = R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_E\right) = R \cos \theta_E.$$

On obtient donc bien $e(r) = \sqrt{R^2 - r^2} - R \cos \theta_E$.

Q28. Toujours dans OHA : $\frac{d}{2} = R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_E\right) = R \sin \theta_E \approx R \theta_E$ donc $R \approx \frac{d}{2\theta_E}$. Alors

$$e(r) = R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} - R \cos \theta_E \approx R \sqrt{1 - \frac{4r^2 \theta_E^2}{d^2}} - R \left(1 - \frac{\theta_E^2}{2}\right) \approx R \left(1 - \frac{2r^2 \theta_E^2}{d^2}\right) - R \left(1 - \frac{\theta_E^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{2Rr^2 \theta_E^2}{d^2} + \frac{R \theta_E^2}{2} = \frac{R \theta_E^2}{2} \left(1 - \frac{4r^2}{d^2}\right) \text{ soit } e(r) \approx \frac{1}{4} d \theta_E \left(1 - \frac{4r^2}{d^2}\right).$$



Q29. $\delta(r) = 2n_l e(r)$ (aller-retour sur PI dans le liquide) soit $\delta(r) = \frac{1}{2} n_l d \theta_E \left(1 - \frac{4r^2}{d^2}\right)$. Ordre d'interférences : $p(r) = \frac{\varphi(r)}{2\pi} = \frac{\delta(r)}{\lambda_0}$

soit $p(r) = \frac{n_l d \theta_E}{2\lambda_0} \left(1 - \frac{4r^2}{d^2}\right)$.

Q30. $p(0) = \frac{n_l d \theta_E}{2\lambda_0} = p_0 + \varepsilon$. Comme l'ordre est une fonction décroissante de r , l'ordre du premier anneau brillant est $p(r_1) = p_0$, celui du deuxième est $p(r_2) = p_0 - 1$, et ainsi de suite, celui du m -ième anneau brillant étant donc $p(r_m) = p_0 - m + 1$.

Sur le bord de la goutte, $r = \frac{d}{2}$ et $p\left(\frac{d}{2}\right) = 0$. Les ordres des anneaux brillants vont donc de p_0 à 0 : il y en a $p_0 + 1$.

Q31. En combinant les formules précédentes : $p_0 - m + 1 = \frac{n_l d \theta_E}{2\lambda_0} \left(1 - \frac{4r_m^2}{d^2}\right)$ donc la courbe donnant r_m^2 en fonction de m est une

droite de pente $a = \frac{\lambda_0 d}{2n_l \theta_E}$, d'où on tire $\theta_E = \frac{\lambda_0 d}{2n_l a}$. Une régression linéaire donne $a = 1200 \mu\text{m}^2$ d'où $\theta_E = 0,034 \text{ rad} = 1^\circ 57'$.

□ **Troisième problème** (Centrale-Supélec TSI 2019)

Q1. Le signal oscillant entre 0 et 20 mV environ, sa valeur moyenne est voisine de 10 mV .

Q2. Il semble que l'on puisse distinguer 3 fois le même motif complet, avec un pic fin à 1,4 ms, 4,6 ms puis 7,8 ms, ce qui correspond à une période $T = 3,2 \text{ ms}$, d'où $f_{co} = 310 \text{ Hz}$ environ.

Q3. La corde étant légèrement désaccordée, il doit s'agir de la corde de mi aigu (fréquence de consigne 329,6 Hz).

Q4. Ce signal étant périodique mais non sinusoïdal, son analyse spectrale fera apparaître des harmoniques.

Q5. La fonction de transfert est définie par : $H_1(j\omega) = \frac{u_1}{u_e}$. Pont diviseur de tension : $H_1(j\omega) = \frac{R_1}{1/jC_1\omega + R_1} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$.

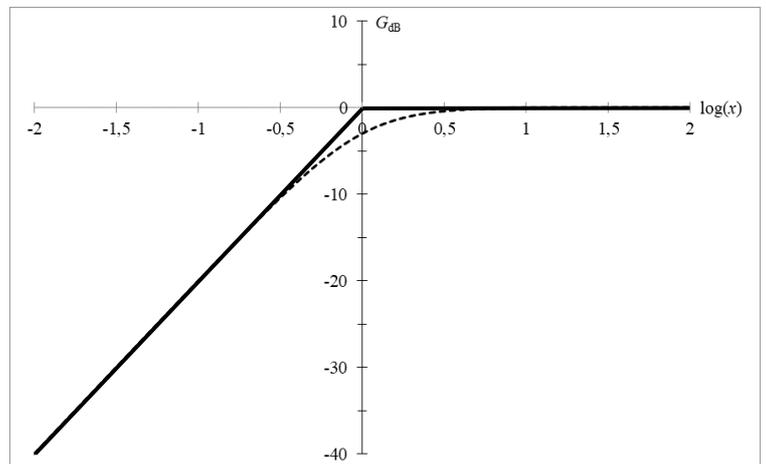
Q6. En basse fréquence ($R_1C_1\omega \ll 1$) : $|H_1(j\omega)| \ll 1$ donc u_1 est très faible. En haute fréquence ($R_1C_1\omega \gg 1$) : $H_1(j\omega) \approx 1$ donc $u_1 \approx u_e$. Ce quadripôle est donc un filtre passe-haut (d'ordre 1). On peut écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$H_1(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1} \text{ en posant } \omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}. \text{ Il s'agit de la pulsation de coupure à } -3 \text{ dB (pour laquelle le signal est atténué de } \sqrt{2}).$$

Q7. L'allure du diagramme de Bode d'un passe-haut d'ordre 1 est donnée ci-contre (avec $x = \omega/\omega_1$) : asymptotes en traits pleins, courbe réelle en pointillé. La pente de l'asymptote basse fréquence est de +20 dB/décade.

Q8. $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$. AN $f_1 = 16 \text{ Hz}$.

C'est une fréquence nettement plus faible que celle du signal. Le rôle de ce premier filtre est donc d'éliminer uniquement l'harmonique de fréquence 0, c'est-à-dire d'éliminer la composante continue du signal (pour garder un signal de valeur moyenne nulle).



Q9. Le montage comporte une boucle de rétroaction sur l'entrée - de l'ALI, celui-ci fonctionne donc en régime linéaire (si le signal d'entrée n'est pas trop grand), donc les potentiels de ses deux entrées sont égaux : $v^- = v^+ = e$. De plus, l'ALI étant supposé idéal, les

courants dans ses entrées sont nuls : ainsi les deux impédances \underline{Z} et \underline{Z}' peuvent être considérées en série, elles constituent donc un (pont)

diviseur de tension : $\underline{e} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}'} \underline{s}$ d'où $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$.

Q10. Dans ce cas, $\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$ est un réel positif supérieur à 1 : le montage est un amplificateur (dit non inverseur).

Q11. $\underline{Y}_{\text{éq}} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega$ donc $\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Q12, 13. $\underline{H}_2 = 1 + \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R_3}$ soit $\underline{H}_2 = 1 + \frac{1}{R_3} \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$. On peut l'écrire $\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$ avec $G_0 = \frac{R_2}{R_3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$.

Q14. En basse fréquence ($R_2C_2\omega \ll 1$) : $\underline{H}_2 \approx 1 + G_0$ (réel positif) donc $|\underline{H}_2| \approx 1 + G_0$. En haute fréquence ($R_2C_2\omega \gg 1$) : $|\underline{H}_2| \approx 1$.

Q15. $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$. AN $f_2 = 500 \text{ Hz}$ et $G_0 = 110$. Ce filtre amplifie fortement le fondamental ($f_{\text{co}} = 310 \text{ Hz} < 500 \text{ Hz}$), d'un facteur proche de 100, mais il atténue moins les harmoniques : plus leur rang est élevé, plus leur amplification est faible. Ainsi on se rapproche (un peu) d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} .

Q16. Le filtre atténue les basses fréquences (asymptote de pente +20 dB/décade) et les hautes fréquences (asymptote de pente -20 dB/décade) : c'est un passes-bande d'ordre 2. Sa fréquence centrale, correspondant au gain maximal, peut être évaluée à $f_{\text{ac}} = 329 \text{ Hz}$, ce qui correspond bien à la valeur indiquée dans le tableau initial.

Q17. La bande passante est l'intervalle de fréquences pour lequel G_{dB} est supérieur ou égal à $G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}$: on lit sur la courbe $G_{\text{dB,max}} = 0$ et un intervalle $[320 \text{ Hz} ; 337 \text{ Hz}]$, soit une largeur de 17 Hz.

Q18. Pour 315 Hz on lit $G_{\text{dB}} = -6 \text{ dB} = -20 \log 2$, donc le signal est atténué d'un facteur 2.

Q19. On observe plusieurs choses : un pic à la fréquence 0, de hauteur 10 mV, qui correspond à la valeur moyenne du signal (évaluée en **Q1**) ; un pic de fréquence fondamentale f_{co} légèrement supérieure à 300 Hz, qui correspond bien à l'estimation de **Q2** ; des harmoniques de fréquences multiples de f_{co} , comme indiqué en **Q4**.

Q20. À la sortie de (F_a), on a simplement supprimé la composante continue, sans modifier les autres, le spectre est donc le (a).

Q21. À la sortie de (F_b), le fondamental a été amplifié d'un facteur proche de 100, d'où une amplitude proche de 1800 mV, les autres harmoniques étant de moins en moins amplifiés : c'est le spectre (d) qui correspond à ces valeurs (le spectre (b) a des amplitudes trop faibles, et le (c) comporte une composante continue alors qu'elle a été éliminée).

Q22. À la sortie de (F_c), passe-bande très sélectif, il n'y a pratiquement plus que le fondamental, atténué d'un facteur 2 (d'après **Q18**), c'est-à-dire que le signal est devenu pratiquement sinusoïdal d'amplitude 900 mV.

