

Devoir test de physique n° 4

Cet énoncé comporte trois problèmes.
Durée : quatre heures. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Premier problème

La spectrométrie ICP-AES

Cette partie s'intéresse à quelques aspects de la spectrométrie ICP-AES, acronyme de *Inductively Coupled Plasma - Atomic Emission Spectrometry* (plasma à couplage inductif - spectrométrie d'émission atomique). Il s'agit d'une technique d'analyse de grande précision permettant la mesure de la nature et de la concentration des éléments qui se trouvent dans les matières solides, les liquides ou les gaz. On peut notamment déterminer grâce à celle-ci l'abondance des métaux lourds dans l'eau du circuit primaire d'une centrale nucléaire ou encore contrôler l'efficacité des résines échangeuses d'ions.

Un spectromètre ICP-AES utilise une torche à plasma (figure 7). À la base de la torche sont introduits de l'argon, ainsi que l'échantillon à analyser à l'état d'aérosol (microgouttelettes d'un diamètre maximum de l'ordre de 100 μm). Le plasma est initié par l'envoi d'une décharge électrique et doit ensuite être entretenu à l'aide d'un bobinage qui crée un champ magnétique variable à haute fréquence.

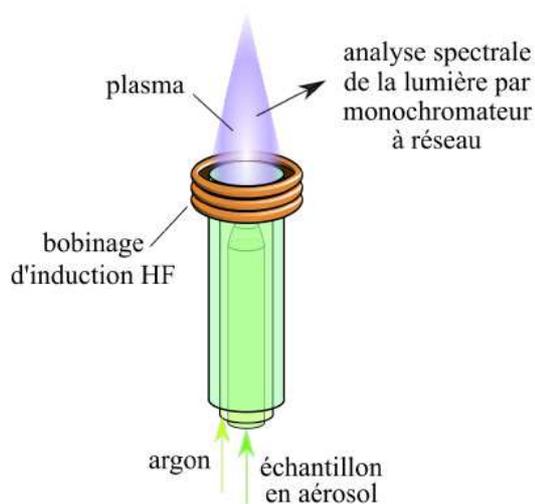
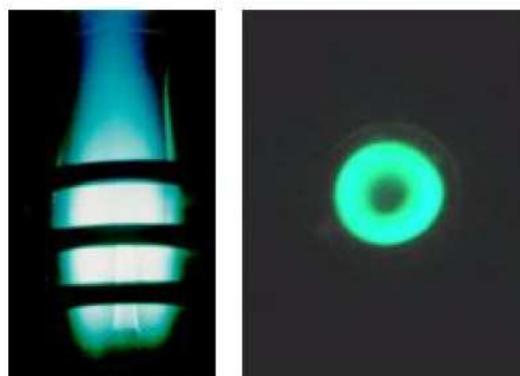


Schéma d'une torche à plasma



Photographies du plasma d'une torche
Vue latérale à gauche et vue axiale à droite

Figure 7

Dans le plasma, à plusieurs milliers de kelvins, l'échantillon est vaporisé, désolvaté, atomisé voire ionisé. Les atomes sont ionisés si leur énergie d'ionisation est inférieure à celle de l'argon, ce qui est le cas de la plupart des éléments chimiques.

Chaque atome ou ion excité émet plusieurs photons (rayonnement lumineux) à des longueurs d'onde qui lui sont propres lors de son retour à l'état fondamental. La lumière est envoyée vers un monochromateur à réseau dont la résolution spectrale en longueur d'onde est très élevée, voisine de 20 pm. Les signaux lumineux sont mesurés par un capteur qui permet l'analyse de longueurs d'onde allant de 166 à 847 nm, l'intensité des pics émis étant fonction de la concentration de l'échantillon initial.

Nous allons dans un premier temps étudier un modèle simple de la partie optique du dispositif. Ensuite, nous nous intéresserons aux effets du champ magnétique variable sur le plasma.

III.A – Spectroscopie et résolution

III.A.1) Interférences à deux ondes

On considère le dispositif de la figure 8. Une pupille dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est percée de deux trous d'Young identiques espacés de la distance a . Une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ (dans l'air, assimilé au vide) éclaire cette pupille en incidence normale. On observe la figure obtenue dans le plan focal image d'une lentille de centre optique O et d'axe optique (Oz). On repère un point M de l'écran recevant les ondes issues des deux trous par ses coordonnées cartésiennes (x, y, f') .

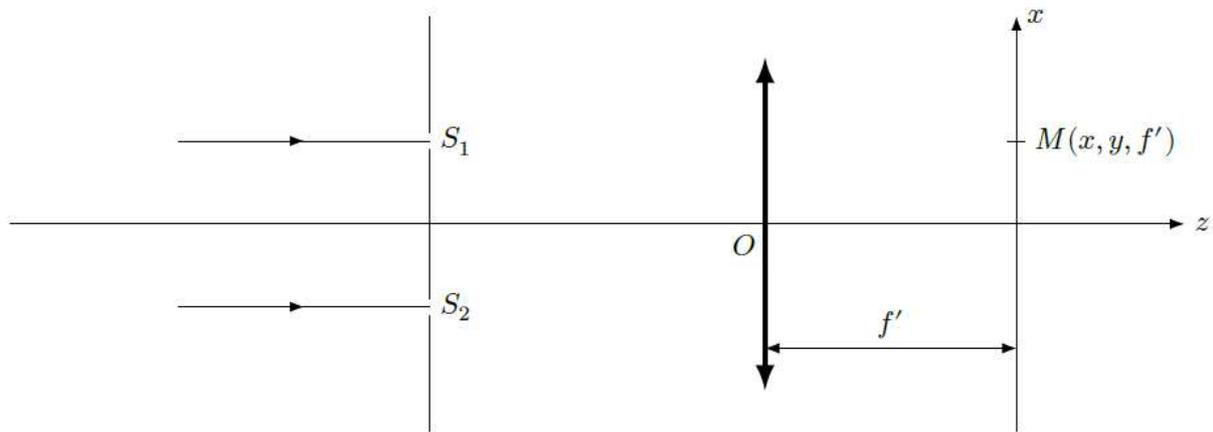


Figure 8

- Q 18.** Établir l'expression de la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de a , x et f' , en faisant les approximations jugées utiles.
- Q 19.** Établir l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$. Décrire la figure que l'on observe sur l'écran.
- Q 20.** Calculer numériquement l'interfrange pour $a = 100 \mu\text{m}$, $f' = 20 \text{ cm}$ et $\lambda = 499,3 \text{ nm}$ (longueur d'onde associée à une raie du nickel présent dans un échantillon).
- Q 21.** La résolution d'un spectromètre est le plus petit écart entre deux longueurs d'onde que l'on peut séparer. Expliquer pourquoi le dispositif précédent à deux trous d'Young ne peut permettre d'atteindre la résolution voisine de 20 pm d'un spectromètre ICP-AES.

III.A.2) Interférences à N ondes

On considère à présent un réseau constitué de N ouvertures identiques ($N > 2$), distantes de a suivant l'axe parallèle à (Ox) . Ces N ouvertures sont éclairées par une onde plane progressive monochromatique en incidence normale de longueur d'onde λ . Sur la figure 9, l'angle θ , orienté selon le sens trigonométrique, indique une direction des interférences à l'infini à N ondes.

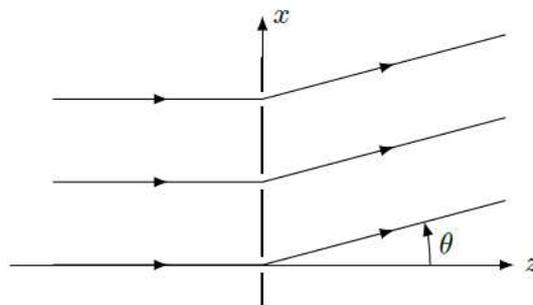


Figure 9

- Q 22.** Expliciter le déphasage φ entre deux ondes issues de trous successifs en fonction de λ , a et θ .
- Q 23.** Justifier qu'on observe un maximum d'intensité si on a $\varphi = 2p\pi$ avec p un entier relatif accessible. Comment appelle-t-on l'entier p ? Exprimer l'angle θ_1 correspondant au pic $p = 1$.
- Q 24.** Le réseau utilisé dans certains spectromètres ICP-AES comporte 1800 ouvertures par millimètre. Calculer numériquement θ_1 pour $\lambda = 499,3 \text{ nm}$. Pourquoi n'est-il plus envisageable d'utiliser le dispositif de projection (lentille et écran) décrit en III.A.1 ?
- Q 25.** Établir que la demi-largeur d'un pic d'intensité lumineuse est donnée par $\Delta\varphi = 2\pi/N$ et en déduire la demi-largeur angulaire $\Delta\theta$ du pic observé dans la direction θ_1 . Évaluer numériquement $\Delta\theta$, sachant que les N ouvertures éclairées du réseau occupent une largeur $\ell = 5 \text{ cm}$.
- Q 26.** On considère que la source émet une deuxième longueur d'onde λ' très proche de λ . On note θ'_1 l'angle d'observation du premier pic ($p = 1$) correspondant à la longueur d'onde λ' . On admet que l'on peut séparer les deux pics seulement si $|\theta'_1 - \theta_1| \geq \Delta\theta$. Obtenir l'expression de la résolution du dispositif en fonction des grandeurs utiles parmi λ , N et a .
- Q 27.** Évaluer numériquement la résolution du réseau utilisé. Proposer des raisons visant à expliquer la différence entre cette valeur et celle, voisine de 20 pm , d'un spectromètre ICP-AES.

Deuxième problème

Mesure d'un angle de contact

On considère maintenant une petite goutte liquide, déposée sur un substrat solide et plongée dans l'air. En négligeant les effets de la pesanteur, la goutte adopte la forme d'une calotte sphérique lorsqu'elle ne s'étale pas totalement. Les tensions superficielles des différentes interfaces mises en jeu conditionnent l'angle θ_E , appelé angle de contact, entre le substrat et la tangente à la goutte au niveau de la ligne de contact entre les trois phases, solide, liquide et gazeuse (**figure 6**).

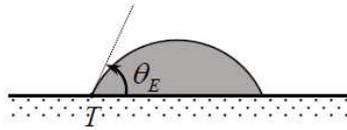


Figure 6 - Angle de contact d'une goutte déposée sur un substrat solide

On propose dans cette partie d'étudier une méthode interférométrique de mesure d'un angle de contact. Déposée sur un substrat solide d'indice optique n_s , la goutte liquide d'indice optique $n_l < n_s$ adopte la forme d'une calotte sphérique de centre O et de rayon R et forme sur le substrat un disque de diamètre d (**figure 7**). On suppose dans toute cette partie que l'angle de contact θ_E est très petit : $\theta_E \ll 1$ rad.

La goutte est entièrement éclairée par un faisceau laser élargi, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , parallèle à l'axe de révolution (O, \vec{u}_z) de la goutte, et normal au plan du substrat. Le substrat étant supposé parfaitement réfléchissant, on peut observer des interférences entre le rayon réfléchi sur le dioptre air/liquide en un point P situé à la distance r de l'axe (O, \vec{u}_z) et le rayon réfléchi en un point I sur le dioptre liquide/substrat. La goutte étudiée présente une épaisseur suffisamment faible pour qu'on puisse négliger l'effet de déviation du rayon lumineux traversant la goutte par réfraction et réflexion sur le substrat. En admettant que les deux réflexions au niveau des interfaces n'introduisent pas de déphasage, la différence de marche entre ces deux rayons correspond donc à un aller et retour dans la goutte sur une distance égale à l'épaisseur $e(r)$ de la goutte au niveau du point P (**figure 7**).

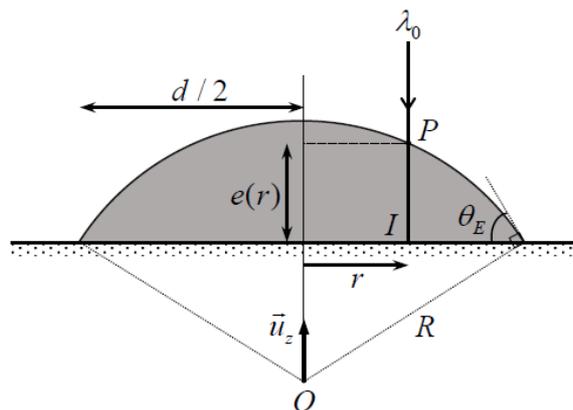


Figure 7 - Grandeurs caractéristiques d'une goutte déposée sur un substrat solide

- Q25.** On qualifie les franges d'interférences de franges d'égale épaisseur. Expliquer cette dénomination. Justifier que ces franges sont circulaires.
- Q26.** Comment peut-on observer en pratique les franges d'interférences localisées au voisinage du plan du substrat ?
- Q27.** En traduisant le fait que le point P appartient au cercle de centre O et de rayon R , montrer que l'épaisseur au niveau de ce point s'écrit : $e(r) = \sqrt{R^2 - r^2} - R \cos \theta_E$.

Q28. En se limitant à un développement au deuxième ordre en θ_E , exprimer R en fonction de d et

$$\theta_E. \text{ D\u00e9duire de ces r\u00e9sultats que } e(r) \cong \frac{1}{4}d\theta_E \left(1 - \frac{4r^2}{d^2}\right).$$

Q29. Exprimer la diff\u00e9rence de marche $\delta(r)$ en fonction de l'\u00e9paisseur locale $e(r)$ et de l'indice n_ℓ de la goutte. En d\u00e9duire l'ordre d'interf\u00e9rences $p(r)$ en fonction de n_ℓ , d , r , λ_0 et θ_E .

Q30. On \u00e9crit l'ordre d'interf\u00e9rences au centre de la figure d'interf\u00e9rences ($r=0$) sous la forme : $p(r=0) = p_0 + \varepsilon$ avec p_0 un entier et $0 \leq \varepsilon < 1$. On utilise l'indice m pour rep\u00e9rer les anneaux brillants sachant que $m=1$ correspond au premier anneau brillant \u00e0 partir du centre. Exprimer l'ordre d'interf\u00e9rences $p(r_m)$ du m -i\u00eame anneau brillant de rayon r_m en fonction de p_0 et m . Donner le nombre d'anneaux brillants observables en fonction de p_0 .

L'exp\u00e9rience est r\u00e9alis\u00e9e en d\u00e9posant une microgoutte d'un fondu de polym\u00e8re, le polydim\u00e9thylsiloxane (PDMS), sur une couche lisse de silice. On obtient la figure d'interf\u00e9rences suivante (**figure 8**).

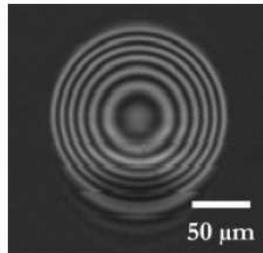


Figure 8 - Figure d'interf\u00e9rences avec une goutte de PDMS sur une couche de silice

On d\u00e9duit directement de la figure les rayons r_m des 6 premiers anneaux brillants (**tableau 2**).

m	1	2	3	4	5	6
r_m (μm)	30	46	57	67	75	83

Tableau 2 - Rayons des premiers anneaux brillants

Q31. Les grandeurs n_ℓ , d et λ_0 \u00e9tant suppos\u00e9es connues, expliquer comment exploiter graphiquement ces donn\u00e9es exp\u00e9rimentales afin d'en d\u00e9duire l'angle de contact θ_E . D\u00e9terminer θ_E sachant que $n_\ell = 1,4$; $d = 174 \mu\text{m}$ et $\lambda_0 = 658 \text{ nm}$.

Troisi\u00eame probl\u00e8me

Accordeur de guitare

Nous allons \u00e9tudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La probl\u00e9matique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, R\u00e9, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fr\u00e9quences fondamentales th\u00e9oriques de vibration de ces cordes, not\u00e9es f_{ac} sont donn\u00e9es dans le tableau 1.

Corde	Fr\u00e9quence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
R\u00e9	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

- On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la figure 1.

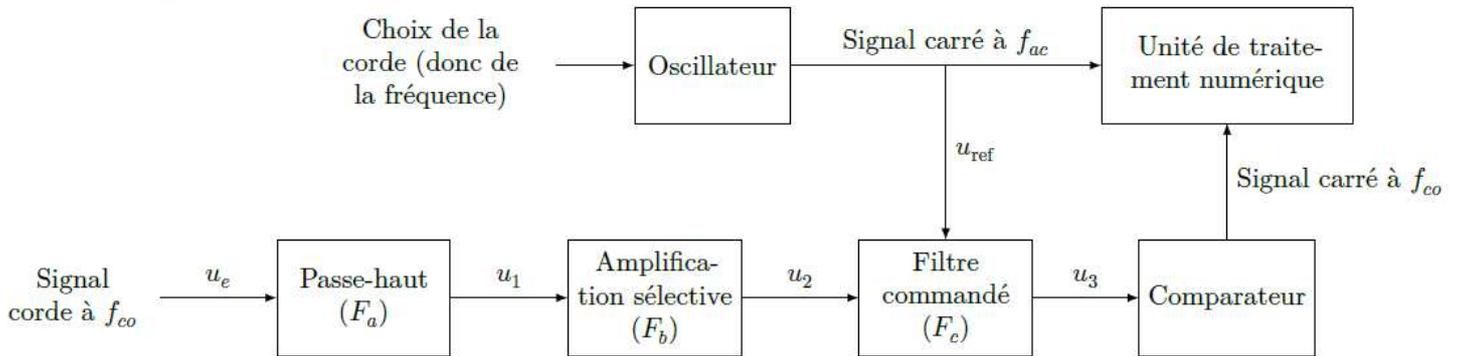


Figure 1 Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde.

I.A – Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

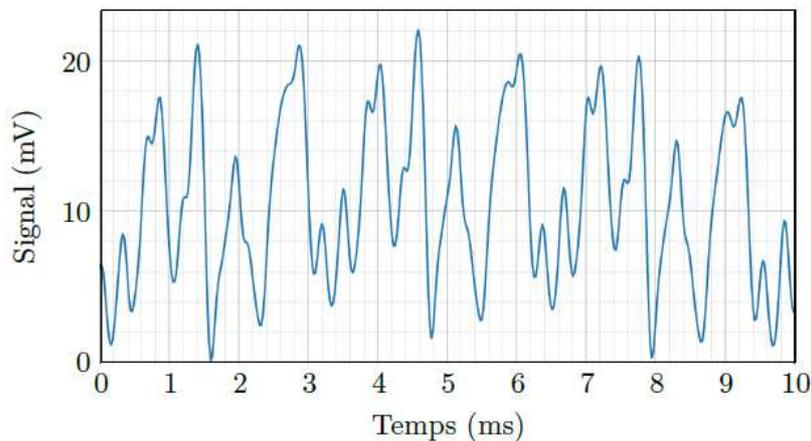


Figure 2 Signal de la guitare

- Q 1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
- Q 2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
- Q 3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
- Q 4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

I.B – Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre (F_a)).

Q 5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.

Q 6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

Q 7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.

Q 8. On a choisi $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

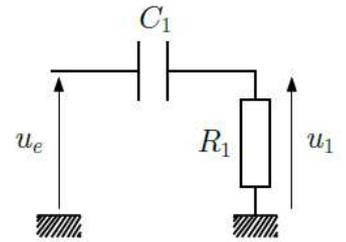


Figure 3 Filtre (F_a)

I.C – Deuxième filtre

Dans cette sous-partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

I.C.1) Préambule

Soit le filtre de la figure 4(a).

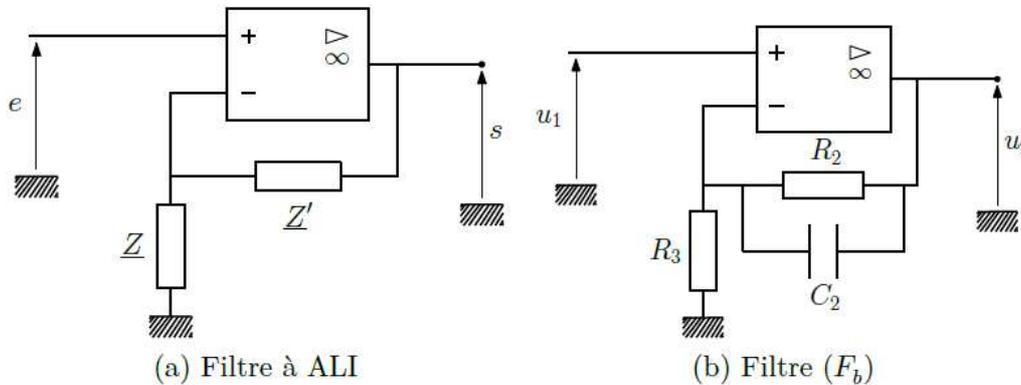


Figure 4 Deux filtres

Q 9. Exprimer sa fonction de transfert \underline{H} en fonction de \underline{Z} et \underline{Z}' .

Q 10. Que devient \underline{H} si \underline{Z} et \underline{Z}' sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

I.C.2) Amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre de la figure 3 le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure 4(b) (filtre (F_b)).

Q 11. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_{\text{eq}}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

Q 12. Dédurre de la question 9 l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 .

Q 13. Mettre \underline{H}_2 sous la forme

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

Q 14. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?

Q 15. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470 \text{ pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

I.D – Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (à capacité commutée) sera précisé dans la sous partie I.F.

I.D.1) Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

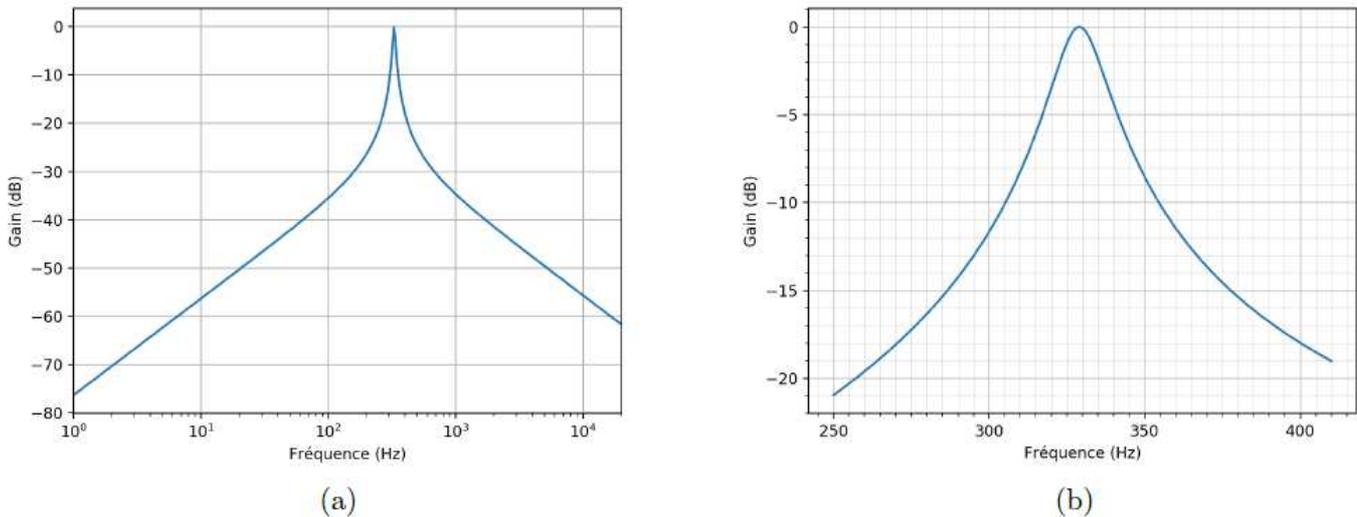


Figure 5 Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

Q 16. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

Q 17. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.

Q 18. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$ Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

I.D.2) Analyse spectrale

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

Q 19. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.

Q 20. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

Q 21. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

Q 22. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

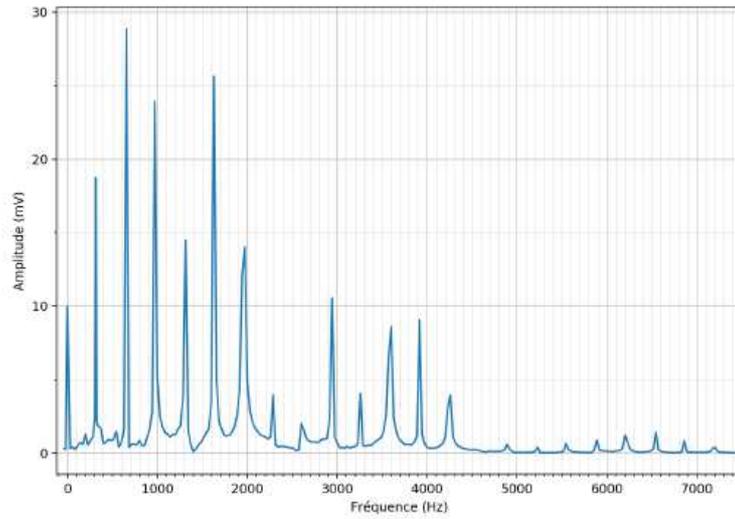
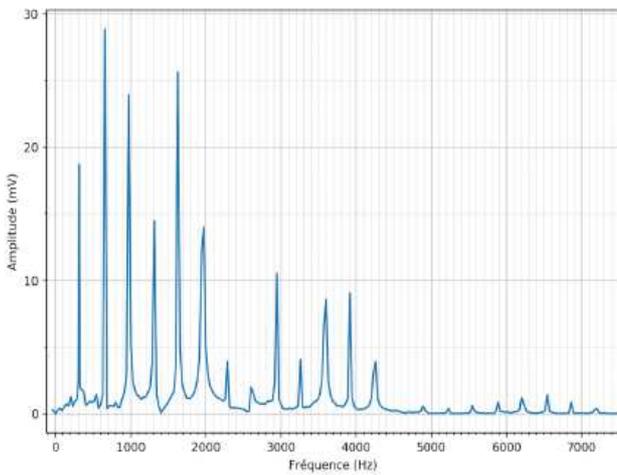
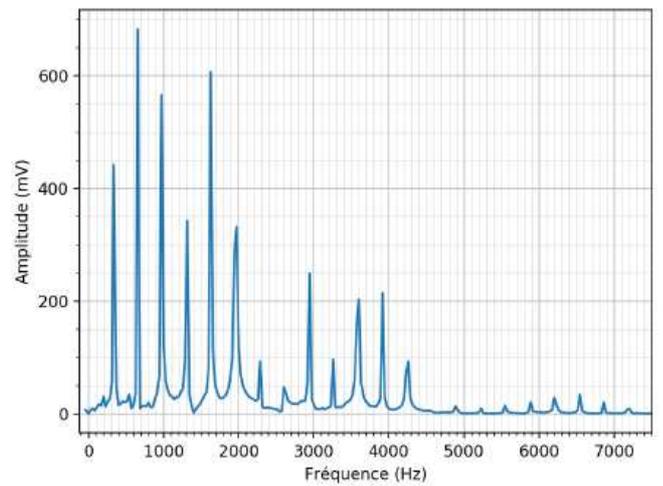


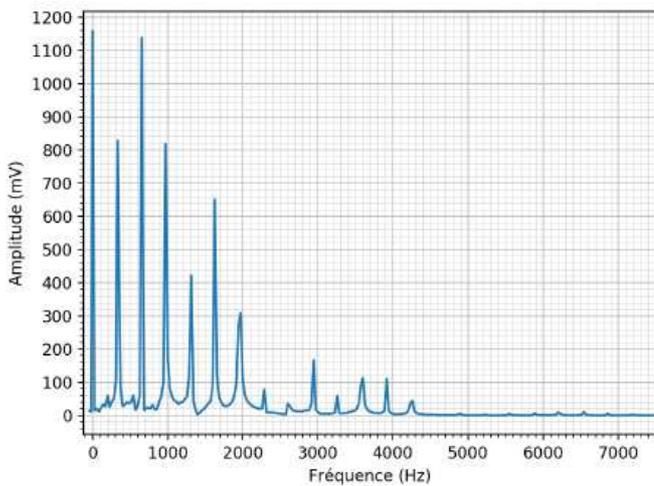
Figure 6 Spectre du signal d'entrée



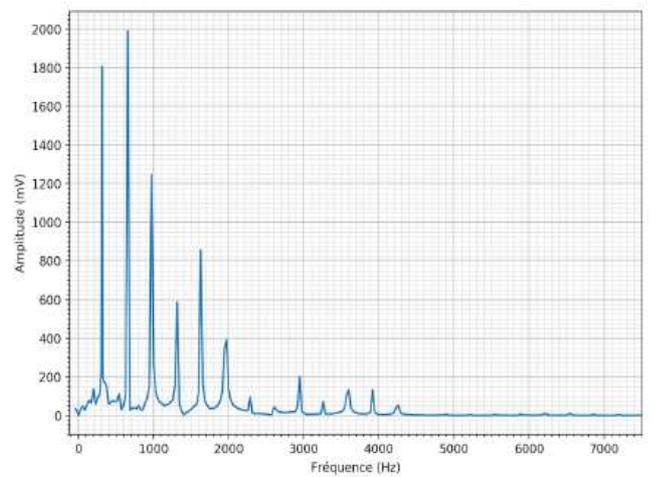
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 7 Spectres