Exercices du chapitre Ém1

Distributions de charges et de courants

1. Distribution de charges à symétrie cylindrique

Un cylindre de révolution d'axe (Oz), de rayon R et de hauteur H, est chargé en volume avec une densité non uniforme $\rho(r)=\rho_0\left(1-\dfrac{r^2}{2R^2}\right)$ (ρ_0 étant une constante).

a) Représenter la courbe de la fonction $\rho(r)$, et calculer sa valeur moyenne $<\rho>$ sur l'intervalle $[0;R]$.

b) Déterminer la charge totale Q et la charge volumique moyenne ρ_m. Pourquoi trouve-t-on $\rho_\mathrm{m}\neq<\rho>$?

2. Distribution de courants non uniforme

Un fil conducteur cylindrique, de rayon R = 6,0 mm et d'axe (Oz), est parcouru par un courant électrique de densité $\vec{j}(r,t)=j_0\exp\big(\beta(r-R)\big)\cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$ avec $j_0=2{,}5\cdot10^5\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$ et $\beta=6{,}0\cdot10^4\ \mathrm{m^{-1}}$.

a) Représenter quelques lignes de courant sur un schéma. Par ailleurs, tracer l'allure de la courbe de $j_z(r)$.

b) Calculer l'intensité $I(t)$ dans ce fil, puis sa valeur efficace.

Indication : une primitive de $r\exp(\beta r)$ est $\left(\dfrac{r}{\beta}-\dfrac{1}{\beta^2}\right)\exp(\beta r)$.

c) Montrer que la proportion du courant concentrée sur une épaisseur $c\ll R$ à la surface du conducteur est approximativement $1-\exp(-\beta c)$. En déduire la valeur de l'épaisseur c qui concentre 99 % du courant.

Conducteur ohmique

3. Ordres de grandeur pour un métal

L'or est le troisième meilleur conducteur électrique, avec une conductivité $\gamma=4{,}52\cdot10^7\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$ dans les conditions usuelles.

On donne sa masse volumique $\rho=19{,}3\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, sa masse molaire $M=197\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$, ainsi que la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_\mathrm{A}=6{,}02\cdot10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$, la masse de l'électron $m_\mathrm{e}=9{,}11\cdot10^{-31}$ kg et la charge élémentaire $e=1{,}60\cdot10^{-19}$ C.

a) En supposant que dans le métal, chaque atome d'or perde un électron qui devient libre de circuler, déterminer la densité volumique d'électrons libres, notée n^*.

b) Énoncer la loi d'Ohm locale, et la démontrer en considérant comme particule un électron dont la vitesse s'identifie à la vitesse moyenne $\vec{v}$ de l'ensemble des électrons. En déduire l'expression de la conductivité en fonction de n^*, e, m_e et du temps moyen τ entre deux collisions.

c) Évaluer numériquement τ, et en déduire un critère de validité du modèle en régime variable.

d) Calculer numériquement la norme v de la vitesse moyenne (ou vitesse d'ensemble) des électrons en présence d'un champ électrostatique $E=100\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

e) Comparer v à leur vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique, notée u, en supposant que les électrons se comportent comme les molécules d'un gaz parfait : $u=\sqrt{\dfrac{3RT}{M_\mathrm{e}}}$.

On donne R = 8,3 $\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, et on se placera à 25 °C.

f) Supposons qu'un fil d'or soit soumis, d'une part au champ électrostatique précédent, d'autre part à un champ magnétostatique de norme B. Évaluer jusqu'à quelle valeur de B on peut négliger la force magnétique qui s'exerce sur les électrons devant la force électrique. Est-ce le cas pour le champ magnétique terrestre ?

4. Ordres de grandeur pour un semi-conducteur

Le germanium, élément chimique de symbole Ge et de numéro atomique 32, est un solide semi-conducteur : la conduction y est assurée par des électrons libres et également par des *trous*, ou lacunes électroniques sur les atomes du réseau ayant libéré un électron (et qui sont donc devenus des ions Ge^+). Dans le germanium pur, les électrons libres et les trous ont donc la même densité, de valeur $n_0^*=2{,}4\cdot10^{19}\ \mathrm{m^{-3}}$.

En présence d'un champ électrique $\vec{E}$, chaque type de particule acquiert une vitesse moyenne $\vec{v}=\mu\vec{E}$ en régime permanent, où μ est sa mobilité ; on donne $\mu_\mathrm{e}=-0{,}39\ \mathrm{m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}}$ (électrons) et $\mu_\mathrm{t}=0{,}19\ \mathrm{m^2\cdot V^{-1}\cdot s^{-1}}$ (trous). La constante d'Avogadro est $\mathcal{N}_\mathrm{A}=6{,}02\cdot10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$.

a) Calculer la proportion d'atomes ionisés dans le germanium pur. On donne $M=72{,}6\ \mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $\rho=5320\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

b) Déterminer la conductivité du germanium pur.

Le *dopage* d'un semi-conducteur consiste à y introduire des atomes d'un autre élément, susceptible d'apporter des électrons libres supplémentaires (dopage de type N) ou bien des trous supplémentaires (dopage de type P).

On peut par exemple réaliser un dopage de type P du germanium en y introduisant des atomes de bore (B, numéro atomique 5), qui viennent se substituer à des atomes de germanium dans le réseau cristallin (de type diamant). Chaque atome B entraîne l'apparition d'un trou pouvant circuler ; les trous ainsi obtenus s'ajoutent à ceux provenant de l'ionisation d'atomes Ge (dont la quantité ne change pas).

c) Justifier le fait que chaque atome B apporte un trou.

d) Interpréter le fait que la densité des électrons libres et celle des trous vérifient toujours la relation : $n_\mathrm{e}^*\times n_\mathrm{t}^*=n_0^{*2}$.

e) Pour un dopage au bore dans lequel un atome Ge sur un million est remplacé par un atome B, déterminer les densités d'électrons et de trous. En déduire la conductivité du germanium dopé.

5. Conductivité complexe en régime variable

On considère un conducteur dont les porteurs de charges libres, de charge individuelle q et de masse m, ont une densité volumique n^*. On le soumet à un champ électrique uniforme mais variable, d'expression $\vec{E}(t)=\overrightarrow{E_\mathrm{m}}\cos(\omega t)$.

a) En utilisant le modèle de Drude, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ (vitesse moyenne ou d'ensemble) des porteurs de charges.

b) En régime permanent sinusoïdal, on cherche une expression de la vitesse sous la forme complexe $\underline{\vec{v}}(t)=\underline{\vec{V}}\exp(j\omega t)$. Déterminer l'amplitude complexe $\underline{\vec{V}}$, et en déduire, par analogie avec le cas stationnaire, l'expression d'une conductivité complexe $\underline{\gamma}$. Vers quelles valeurs tend $\underline{\gamma}$ en basse fréquence et en haute fréquence ?

☞ *Réponses partielles*

1. b) $\rho_\mathrm{m}=\dfrac{3\rho_0}{4}$. **2.** b) $I_\mathrm{eff}\approx\dfrac{\pi\sqrt{2}j_0R}{\beta}$. **3.** a) $n^*=5{,}90\cdot10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$. c) $\tau=2{,}73\cdot10^{-14}$ s. **4.** b) $\gamma=2{,}2\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$.