Ém1 – Corrigé des exercices 3, 4, 5

¤ Exercice 3

a) Le nombre d'électrons par unité de volume est égal au nombre d'atomes d'or : $\boxed{n^* = \dfrac{\mathcal{N}_A \rho}{M}}$. AN $\boxed{n^* = 5{,}90 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}}$.

b) Loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$ où $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant, $\vec{E}$ le champ électrique appliqué au conducteur, et γ la conductivité électrique. La démonstration (voir cours) conduit à : $\boxed{\gamma = \dfrac{n^* e^2 \tau}{m_e}}$.

c) $\boxed{\tau = \dfrac{\gamma m_e}{n^* e^2}}$. AN $\boxed{\tau = 2{,}73 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{s}}$. Dans le cours, on a trouvé que la vitesse devenait constante au bout de quelques τ, parce qu'on a supposé que le champ électrique était *stationnaire*. Pourtant on utilise aussi la loi d'Ohm est régime variable ! En fait elle reste valable si le champ varie suffisamment lentement, c'est-à-dire si le temps caractéristique du régime (période…) est beaucoup plus long que le temps de relaxation τ : ainsi, on peut toujours considérer que la vitesse $\vec{v}$ proportionnelle à $\vec{E}$ s'établit quasi instantanément. Pour un régime périodique, $T \gg \tau$ équivaut à $\boxed{f \ll \dfrac{1}{\tau} = 3{,}7 \cdot 10^{13}\ \mathrm{Hz} = 37\ \mathrm{THz}}$: cette condition est vérifiée dans tous les circuits électroniques alimentés par des générateurs. Mais si la condition n'est pas vérifiée (par exemple avec le champ électrique d'une onde lumineuse), il faut alors utiliser la méthode de l'exercice 5.

d) $\boxed{v = \dfrac{e \tau E}{m_e}}$. AN $\boxed{v = 48\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}}$. C'est une vitesse qui nous paraît plutôt lente !

e) v est extrêmement faible par rapport à la vitesse quadratique moyenne $\boxed{u = \sqrt{\dfrac{3RT}{M_e}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mathcal{N}_A m_e}} = 1{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

f) $\left\|\overrightarrow{F_m}\right\| \ll \left\|\overrightarrow{F_e}\right\| \Leftrightarrow evB \ll eE \Leftrightarrow \boxed{B \ll \dfrac{E}{v}}$. AN $\boxed{B \ll 200\ \mathrm{T}}$. Or le champ magnétique terrestre est de l'ordre de $10^{-5}\ \mathrm{T}$, et les champs technologiques dépassent très rarement 10 T, donc l'approximation est toujours vérifiée pour ce métal.

¤ Exercice 4

a) Nombre d'atomes de germanium par unité de volume : $n_{\mathrm{Ge}}^* = \dfrac{\mathcal{N}_A \rho}{M}$. La proportion d'atomes ionisés est donc : $\boxed{p = \dfrac{n_0^*}{n_{\mathrm{Ge}}^*} = \dfrac{n_0^* M}{\mathcal{N}_A \rho}}$.

AN $\boxed{p = 5{,}4 \cdot 10^{-10}}$ soit 1 atome sur 2 milliards environ.

b) $\vec{j} = \vec{j_e} + \vec{j_t} = n_0^*(-e)\vec{v_e} + n_0^*(+e)\vec{v_t} = n_0^* e(-\mu_e + \mu_t)\vec{E}$ donc par identification avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$: $\boxed{\gamma = n_0^* e(-\mu_e + \mu_t)}$. AN $\boxed{\gamma = 2{,}2\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}}$.

c) L'atome de bore n'a que 3 électrons de valence, au lieu de 4 pour celui de germanium. Lorsqu'un atome Ge est substitué par un atome B, il manque donc 1 électron pour constituer une liaison covalente : cette lacune électronique constitue un trou mobile.

d) Cette formule est similaire à la loi d'action des masses (ou loi de Guldberg & Waage) décrivant un équilibre chimique. En effet il y a bien un équilibre de type chimique entre les concentrations d'électrons et de trous, puisqu'ils peuvent être créés par ionisation d'un atome Ge, ou au contraire se recombiner : $\mathrm{Ge} \rightleftarrows \mathrm{Ge^+} + \mathrm{e^-}$ (le + sur l'ion $\mathrm{Ge^+}$ représentant un trou).

On a donc à l'équilibre : $\dfrac{[\mathrm{Ge^+}][\mathrm{e^-}]}{c^{\circ 2}} = K^\circ(T)$, soit $n_t^* \times n_e^* = A$ en notant $A = K^\circ(T) c^{\circ 2} \mathcal{N}_A^2$. Comme on a le même équilibre en l'absence de dopage : $n_0^{*2} = A$, d'où $\boxed{n_e^* \times n_t^* = n_0^{*2}}$. Le dopage constitue donc un déplacement d'équilibre par ajout d'un « réactif ».

e) $n_t^* \approx n_B^* = \dfrac{n_{\mathrm{Ge}}^*}{10^6}$ soit $\boxed{n_t^* = \dfrac{\mathcal{N}_A \rho}{10^6 M} = 4{,}4 \cdot 10^{22}\ \mathrm{m^{-3}}}$ (les trous intrinsèques de Ge étant négligeables) et $\boxed{n_e^* = \dfrac{n_0^{*2}}{n_t^*} = 1{,}3 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m^{-3}} \ll n_t^*}$.

La conduction n'est donc pratiquement due qu'aux trous apportés par le bore : $\boxed{\gamma = n_t^* e \mu_t = 1{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}}$.

¤ Exercice 5

a) L'équation différentielle est : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}\vec{v} = \dfrac{q}{m}\vec{E}(t)}$ (voir cours). Le second membre n'est pas constant : on ne peut donc pas trouver une solution particulière constante.

b) On injecte la fonction $\underline{\vec{v}}(t) = \underline{\vec{V}} \exp(j\omega t)$ dans l'équation différentielle, le champ électrique étant lui aussi écrit sous forme complexe : $j\omega \underline{\vec{V}} \exp(j\omega t) + \dfrac{1}{\tau}\underline{\vec{V}} \exp(j\omega t) = \dfrac{q}{m}\overrightarrow{E_m} \exp(j\omega t) \Leftrightarrow j\omega \underline{\vec{V}} + \dfrac{1}{\tau}\underline{\vec{V}} = \dfrac{q}{m}\overrightarrow{E_m}$ d'où $\boxed{\underline{\vec{V}} = \dfrac{\tau q \overrightarrow{E_m}/m}{1 + j\omega\tau}}$.

Alors le vecteur densité de courant peut s'écrire de même $\underline{\vec{j}}(t) = \underline{\vec{J}} \exp(j\omega t)$, avec $\underline{\vec{J}} = n^* q \underline{\vec{V}} = \dfrac{n^* \tau q^2 \overrightarrow{E_m}}{m(1 + j\omega\tau)}$. Ceci est de la forme $\underline{\vec{J}} = \underline{\gamma}\overrightarrow{E_m}$ avec une conductivité complexe $\boxed{\underline{\gamma} = \dfrac{n^* \tau q^2}{m(1 + j\omega\tau)} = \dfrac{\gamma_{\mathrm{statio}}}{1 + j\omega\tau}}$.

En basse fréquence $\left(\omega \ll \dfrac{1}{\tau}\right)$: $\boxed{\underline{\gamma} \to \dfrac{n^* \tau q^2}{m} = \gamma_{\mathrm{statio}}}$ (valeur réelle stationnaire). En haute fréquence $\left(\omega \gg \dfrac{1}{\tau}\right)$: $\boxed{\underline{\gamma} \to \dfrac{n^* \tau q^2}{j\omega\tau} = \dfrac{\gamma_{\mathrm{statio}}}{j\omega\tau}}$; c'est un imaginaire pur, correspondant à un déphasage de $\pi/2$ entre le champ excitateur $\vec{E}(t)$ et la réponse en courant $\vec{j}(t)$; par ailleurs, son module tend vers 0 (il n'y a pratiquement plus de courant à très haute fréquence).