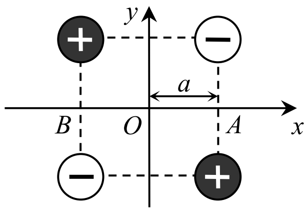
Exercices du chapitre Ém2

Détermination de champ par sommation et symétries

1. Distribution discrète

Quatre charges ponctuelles de même valeur absolue q (deux positives et deux négatives) sont disposées dans le plan (Oxy), aux quatre sommets d'un carré de côté $2a$ centré en O.

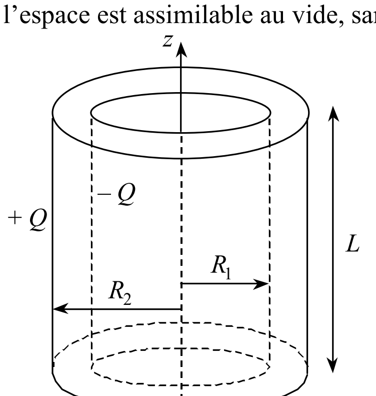


a) Déterminer sans calcul, avec des arguments de symétrie, la direction du champ électrostatique créé au point $A(a,0,0)$. Préciser son sens avec un argument qualitatif. Représenter sur le schéma ce vecteur, ainsi que le champ au point $B(-a,0,0)$.
b) Vérifier les résultats précédents en faisant le calcul explicite du champ en A.
c) Déterminer la direction du champ électrostatique en un point M quelconque de l'axe (Oy) et préciser si la composante obtenue est une fonction paire ou impaire de la coordonnée y.
d) Déterminer sans calcul le champ électrostatique en un point N quelconque de l'axe (Oz).

Théorème de Gauss et superposition

2. Condensateur cylindrique

On considère deux cylindres coaxiaux, d'axe (Oz), de rayons R_1 et R_2 (avec $R_1 < R_2$), et de longueur suffisamment grande pour être considérée comme infinie selon (Oz). On se propose de calculer la capacité d'une tranche de longueur L de ce système, qui constitue un condensateur cylindrique, chacune des deux armatures étant supposée uniformément chargée *en surface* sur toute sa longueur. On note $-Q$ la charge totale portée par le cylindre interne sur une longueur L, et $+Q$ la charge opposée portée par le cylindre externe sur L.
À l'intérieur du cylindre 1, entre les cylindres et à l'extérieur du cylindre 2, l'espace est assimilable au vide, sans charges.



a) En utilisant des arguments de symétrie et d'invariance, simplifier l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en tout point M de l'espace par ces deux cylindres infinis.
b) Déterminer complètement ce champ par application du théorème de Gauss. (Inutile d'utiliser la superposition ici.)
c) En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$. Représenter graphiquement ses variations.
d) Déterminer la capacité C de la tranche de longueur L, en fonction de ε_0, L, R_1 et R_2.
e) Dans le cas où la distance séparant les armatures est faible devant leurs rayons, on pose $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$. Donner alors une expression approchée de C, en fonction de ε_0, e et S (surface de chacune des armatures de longueur L). Commenter l'expression obtenue.

3. Champ dans une cavité

Une boule de centre O_1 et de rayon a, portant la charge volumique uniforme ρ, possède une cavité sphérique de centre O_2 et de rayon b, vide de charges.
a) Déterminer le champ dans cette cavité, en utilisant le résultat du cours pour la boule uniforme. Quelle est sa propriété remarquable ?
b) Que se passe-t-il si les centres O_1 et O_2 sont confondus ? Retrouver ce résultat avec le théorème de Gauss.

4. Distribution à symétrie sphérique

Dans cet exercice, on cherche à déterminer la distribution de charges à partir de la connaissance du champ, et non l'inverse.
On considère une répartition volumique de charges présentant la symétrie sphérique, contenue à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon R. Pour chaque point M intérieur à la sphère on pose $OM = r \leq R$.
a) Déterminer la densité volumique $\rho(r)$ pour que le champ électrostatique ait un module constant à l'intérieur de la sphère, c'est-à-dire pour que ce champ à l'intérieur soit de la forme $\vec{E} = E_0\,\vec{e_r}$.
b) Calculer alors la charge totale Q de la sphère, et déterminer le champ à l'extérieur de la sphère.

Calcul intégral du potentiel puis du champ

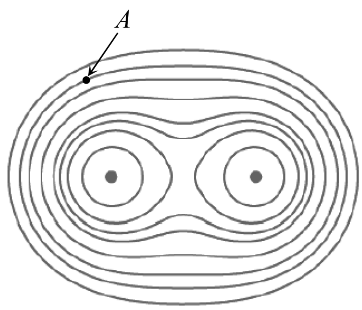
5. Calcul intégral : sphère uniformément chargée

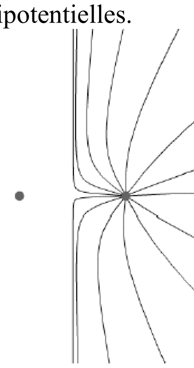
Soit une sphère de rayon R et de centre O, chargée *en surface* avec la densité surfacique uniforme σ. On prendra le potentiel nul à l'infini.
a) Calculer le potentiel électrostatique au point O.
b) Déterminer les invariances du potentiel $V(M)$ dans tout l'espace. Les plans de symétrie apportent-ils une information supplémentaire ?
c) Calculer le potentiel $V(M)$, à l'intérieur ou à l'extérieur à la sphère. Pour cela, on prendra M sur l'axe (Oz), et on exprimera la distance PM en fonction de r, R et θ avec le théorème d'Al-Kashi (ou formule du cosinus).
d) En déduire le champ électrostatique en tout point M, en fonction de ε_0, Q (charge totale de la sphère) et de r. Vérifier que pour M extérieur à la sphère on retrouve un résultat connu. Que peut-on dire du champ à la surface de la sphère ?
e) Retrouver directement l'expression du champ en utilisant le théorème de Gauss.

Topographie du champ et du potentiel

6. Champ et potentiel de deux charges ponctuelles

On considère une distribution constituée de deux petites charges sphériques (pouvant être éventuellement considérées comme ponctuelles). Sur les figures ci-dessous sont représentées, d'une part quelques lignes de champ électrostatique, d'autre part quelques équipotentielles.





a) Identifier la carte représentant des lignes de champ et celle représentant des équipotentielles.

b) Les deux charges sont-elles de signes identiques ou opposés ? Ont-elles la même valeur absolue ?
c) En supposant la charge de droite positive, orienter les lignes de champ.

d) On suppose qu'entre deux équipotentielles consécutives, la différence de potentiel est de 100 V, et que cette figure est à l'échelle 1000/1 (1 mm représente 1 µm). Représenter le champ électrostatique au point A, et évaluer sa norme.

☞ *Réponses partielles*

1. a) $\vec{E}(A) = E_y \overrightarrow{e_y}$ avec $E_y > 0$.

2. a) $\vec{E}(M) = E_r(r)\overrightarrow{e_r}$ en cylindriques.

b) $\vec{E}(M) = \vec{0}$ pour $r < R_1$ ou $r > R_2$; $\vec{E}(M) = -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}\overrightarrow{e_r}$ pour $R_1 < r < R_2$.

3. a) $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$.

4. a) $\rho(r) = \dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{r}$.

5. a) $V(O) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$.

c) $PM = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta}$.