Ém2 – Corrigé des exercices 2 à 5

¤ Exercice 2

a) On utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z). Pour un point M quelconque, le plan (MOz) est un plan de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ est parallèle à ce plan, c'est-à-dire que sa composante sur $\vec{e_\theta}$ est nulle. Le plan (Mxy) est aussi un plan de symétrie (pour un cylindre infini), donc la composante de $\vec{E}(M)$ sur $\vec{e_z}$ est nulle également : il reste $\vec{E}(M)=E_r\vec{e_r}$. De plus la distribution de charges est invariante par rotation autour de (Oz) donc E_r est indépendante de θ. Enfin elle est invariante par translation selon (Oz) donc E_r est indépendante de z. Finalement : $\boxed{\vec{E}(M)=E_r(r)\vec{e_r}}$.

b) On applique le théorème de Gauss à un cylindre fermé C d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur L : $\displaystyle\oiint_C \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n_s}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

$$\oiint_C \vec{E}(M)\cdot \mathrm{d}s\,\vec{n_s}=\iint_{\text{base sup.}} E_r\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}s\,\vec{e_z}+\iint_{\text{base inf.}} E_r\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}s\left(-\vec{e_z}\right)+\iint_{\text{surf. latérale}} E_r(r)\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}s\,\vec{e_r}=0+0+E_r(r)\iint_{\text{surf. lat.}}\mathrm{d}s=E_r(r)2\pi rL.$$

Pour $r<R_1$: $Q_{\text{int}}=0$, donc $E_r(r)2\pi rL=0$, soit $\boxed{\vec{E}(M)=\vec{0}}$. Pour $R_1<r<R_2$: $Q_{\text{int}}=-Q$, donc $E_r(r)2\pi rL=\dfrac{-Q}{\varepsilon_0}$, soit $\boxed{\vec{E}(M)=-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}\vec{e_r}}$. Enfin pour $r>R_2$: $Q_{\text{int}}=-Q+Q=0$, donc $\boxed{\vec{E}(M)=\vec{0}}$.

Le champ électrostatique est confiné entre les deux armatures. Il est discontinu au passage de chaque armature.

c) $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M)=-\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}$. Pour $r<R_1$: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=0$ d'où $V(r)=\text{cte}$. On choisit l'origine des potentiels (masse) sur l'armature intérieure, c'est-à-dire en $r=R_1$: alors la constante est nulle, $\boxed{V(r)=0 \text{ pour } r<R_1}$. Pour $R_1<r<R_2$: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$ d'où $V(r)=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln r+\text{cte}$. Le potentiel étant continu, il est nul en $r=R_1$ donc $\boxed{V(r)=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\dfrac{r}{R_1} \text{ pour } R_1<r<R_2}$. Pour $r>R_2$: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=0$ d'où $V(r)=\text{cte}=V(R_2)$ [toujours par continuité] soit $\boxed{V(r)=\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\dfrac{R_2}{R_1} \text{ pour } r>R_2}$.

d) Par définition : $C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{Q}{V(R_2)-V(R_1)}$ soit $\boxed{C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln R_2/R_1}}$.

e) $\ln\dfrac{R_2}{R_1}=\ln\left(1+\dfrac{e}{R_1}\right)\approx\dfrac{e}{R_1}$ donc $C=\dfrac{\varepsilon_0 2\pi R_1 L}{e}$. Or $2\pi R_1 L$ est l'aire S de l'armature intérieure, qui est pratiquement la même que celle de l'armature extérieure. On a donc trouvé $\boxed{C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$ qui est <u>la même formule que pour un condensateur plan</u> : la courbure des armatures ne change pas l'expression de la capacité, dès lors que l'épaisseur du condensateur est assez faible.

¤ Exercice 3

a) La distribution de charges n'a pas assez de symétries pour qu'on puisse trouver le champ avec le théorème de Gauss.
Mais elle est équivalente à la superposition de deux distributions : une boule de centre O_1 et de rayon a, portant la charge volumique uniforme ρ, sans cavité ; et une boule de centre O_2 et de rayon b, portant la charge volumique uniforme $-\rho$. On peut alors utiliser le principe de superposition, connaissant le champ à l'intérieur d'une boule uniforme (vu en cours, § 3b) : en effet, un point M de la cavité (dans la distribution réelle) se trouve à l'intérieur de chacune des deux boules (dans la distribution équivalente).

$\vec{E}(M)=\vec{E_1}(M)+\vec{E_2}(M)=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1M}+\dfrac{-\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_2M}$ soit $\boxed{\vec{E}(M)=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}}$. On constate que le champ est <u>uniforme dans la cavité</u>, ce qui n'était pas prévisible avec les éléments de symétrie.

b) Si O_1 et O_2 sont confondus, le <u>champ est nul dans la cavité</u>.
Dans ce cas, la distribution est à <u>symétrie sphérique</u> et on peut alors appliquer un autre résultat du cours, obtenu avec le théorème de Gauss : $\vec{E}(M)=\dfrac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$. Puisque $Q_{\text{int}}(r)=0$ en tout point de la cavité, on trouve bien un champ nul.

¤ Exercice 4

a) On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon $r<R$: $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\Leftrightarrow\oiint_S E_0\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}s\,\vec{e_r}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V_{\text{int}}}\rho(r)\,\mathrm{d}\tau$

$\displaystyle\Leftrightarrow\ E_0\oiint_S\mathrm{d}s=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^r\rho(r')r'^2\,\mathrm{d}r'\ \Leftrightarrow\ E_0 4\pi r^2=\frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r\rho(r')r'^2\,\mathrm{d}r'$. Pour obtenir la fonction $\rho(r)$ on dérive des deux côtés par rapport à r (après avoir simplifié par 4π) : $E_0 2r=\dfrac{\rho(r)r^2}{\varepsilon_0}$ d'où $\boxed{\rho(r)=\dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{r}}$.

b) Pour obtenir Q on reprend le calcul précédent (de Q_{int}) avec $r=R$: $\boxed{Q=\varepsilon_0 E_0 4\pi R^2}$.

Pour M à l'extérieur : $\displaystyle\oiint_S E_r(r)\vec{e_r}\cdot\mathrm{d}s\,\vec{e_r}=4\pi r^2E_r(r)=\frac{Q}{\varepsilon_0}$ d'où $\boxed{\vec{E}(M)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}}$ (résultat habituel en symétrie sphérique).

¤ Exercice 5

a) $V(O)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iint_{\text{sphère}}\dfrac{\sigma(P)\,\mathrm{d}s}{PO}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\text{sphère}}\dfrac{\sigma\,\mathrm{d}s}{R}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma}{R}\iint_{\text{sphère}}\mathrm{d}s=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma}{R}4\pi R^2$ soit après simplification : $\boxed{V(O)=\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}}$.

b) La distribution étant à symétrie sphérique, V ne dépend pas des angles θ et φ : ainsi $\boxed{V(M)=V(r)}$.
Les plans de symétrie n'apportent aucune information supplémentaire : V étant un *scalaire*, il n'y a pas de composantes à éliminer.
c) D'après l'invariance ci-dessus, le calcul fait pour un point sur l'axe (Oz) sera valable pour tout autre point. Mais l'intérêt de se placer sur cet axe est que l'angle entre (OM) et (OP) est alors simplement l'angle θ du point P (en coordonnées sphériques) : ainsi la distance OM s'obtient avec la formule d'Al-Kashi, soit $PM^2=OM^2+OP^2-2OM\cdot OP\cos\theta=r^2+R^2-2Rr\cos\theta$.
On utilise alors à nouveau la formule intégrale précédente, mais cette fois il faut vraiment intégrer sur les angles θ et φ :
$V(M)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iint_{\text{sphère}}\dfrac{\sigma\,\mathrm{d}s}{PM}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\dfrac{\sigma R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{R}{r}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\dfrac{2Rr\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}}$. On a mis la fraction sous la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u=r^2+R^2-2Rr\cos\theta$, une primitive est donc $\sqrt{u}=\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}$.

Ainsi $V(M)=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{R}{r}\left[\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{R}{r}\left(\sqrt{r^2+R^2+2Rr}-\sqrt{r^2+R^2-2Rr}\right)=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{R}{r}\left(r+R-|r-R|\right)$ [ne pas oublier les barres de valeur absolue !].

Pour $r>R$ (point M à l'extérieur de la sphère) : $V(M_{\text{ext}})=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{R}{r}(r+R-r+R)$ soit $\boxed{V(M_{\text{ext}})=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{r}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ qui est le résultat habituel en symétrie sphérique (le potentiel est le même que si toute la charge était au centre).

Pour $r<R$ (point M à l'intérieur) : $V(M_{\text{int}})=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{R}{r}(r+R+r-R)$ soit $\boxed{V(M_{\text{int}})=\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}=V(O)}$ (potentiel *uniforme* à l'intérieur).

d) $\vec{E}(M)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M)=-\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e_r}$, soit $\boxed{\vec{E}(M_{\text{ext}})=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}}$ et $\boxed{\vec{E}(M_{\text{int}})=\vec{0}}$.

e) En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon r, pour un champ de la forme $\vec{E}(M)=E_r(r)\vec{e_r}$, on retrouve aisément les deux résultats ci-dessus, sachant que $Q_{\text{int}}=Q$ pour $r>R$, et $Q_{\text{int}}=0$ pour $r<R$.
