Exercices du chapitre Ém5

Données et formules pour tous les exercices : $\mu_0 = 1{,}257\cdot 10^{-6}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$; $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$;

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$; divergence en cylindriques $\mathrm{div}\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$;

rotationnel en cylindriques $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{e_z}$.

Équations de Maxwell et bilan énergétique

1. Décharge d'une boule métallique dans l'air

Pour une expérience d'électrostatique, on a chargé une boule métallique de rayon R avec une charge initiale Q_0 répartie uniformément sur toute sa surface. La boule est placée dans l'air : si celui-ci était parfaitement isolant, la boule pourrait rester chargée indéfiniment. Mais l'air possède en fait une très légère conductivité électrique γ, de l'ordre de $10^{-15}\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$ (surtout lorsqu'il est humide), ce qui entraîne une décharge progressive de la boule : on cherche alors à déterminer l'évolution de sa charge $Q(t)$. Les charges qui quittent la boule suivent des trajectoires rectilignes radiales, ce qui crée une distribution de courant isotrope ; l'air reste globalement neutre.

a) En utilisant les propriétés de symétrie de cette distribution de charges et de courants, simplifier les expressions des champs $\vec{B}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$ créés dans l'air environnant (en M tel que $r > R$).

b) Calculer ces deux champs, puis le vecteur de Poynting.

c) En utilisant l'une des équations de Maxwell, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. Donner sa solution, et donner une évaluation numérique de la durée de décharge de la boule.

d) Déterminer la puissance totale fournie par les champs à l'air environnant. En déduire l'énergie électromagnétique reçue par l'air pendant toute la décharge de la boule.

e) Retrouver ce résultat en calculant la variation de l'énergie électromagnétique stockée dans l'air.

ARQS magnétique

2. Solénoïde dans l'ARQS magnétique

Un solénoïde est constitué de N spires circulaires de rayon a, jointives, formant un cylindre de longueur ℓ. Les fils ayant une épaisseur négligeable devant le rayon a, le solénoïde peut être assimilé à une distribution surfacique de courant. Il est alimenté par un courant d'intensité $i(t) = I_0\exp\left(-t/\tau\right)$.

a) Rappeler sans démonstration l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ créé par ce solénoïde, à l'intérieur et à l'extérieur. En déduire son inductance L.

b) Calculer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde, à l'aide de la loi intégrale de Faraday ou de l'équation de Maxwell–Faraday. Vérifier que ce champ est bien compatible avec l'équation locale de Maxwell–Gauss, et que le champ trouvé à l'extérieur n'est pas contradictoire avec l'équation locale de Maxwell–Faraday.

c) Montrer qu'à l'intérieur du solénoïde, le terme électrique de la densité d'énergie électromagnétique est négligeable devant le terme magnétique, dans le cadre de l'ARQS.

d) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting dans tout l'espace.

e) Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers le cylindre correspondant à la paroi intérieure du solénoïde (longueur ℓ, rayon a^-). Montrer qu'il est égal à la variation de l'énergie électromagnétique stockée dans le solénoïde.

f) Que vaut le flux du vecteur de Poynting à travers un cylindre correspondant à la paroi *extérieure* du solénoïde (longueur ℓ, rayon a^+) ? Que devient alors le bilan énergétique de la question précédente ?

3. Propagation des champs dans un conducteur

Un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω est imposé dans un bloc de fer de conductivité $\gamma = 1{,}0\cdot 10^{7}\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$.

a) Supposons qu'au voisinage d'un point du conducteur il existe à $t = 0$ un petit excédent de charge, de densité volumique ρ_0. Montrer, en utilisant la loi d'Ohm locale et une équation de Maxwell, que la densité de charge ρ tend vers 0 avec un temps de relaxation τ que l'on définira. Évaluer numériquement le temps de disparition de ρ et commenter.

On considère dans la suite que ρ est toujours nulle.

b) Pour une fréquence inférieure au térahertz, montrer que le « courant de déplacement » peut être négligé devant le courant de conduction dans l'équation de Maxwell–Ampère.

c) En tenant compte des deux approximations précédentes, écrire les quatre équations de Maxwell dans ce bloc de fer, avec uniquement les champs $\vec{B}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$ et les constantes τ et c (célérité de la lumière dans le vide).

d) Montrer alors que le champ $\vec{E}(M,t)$ obéit à une équation de diffusion, et préciser l'expression de son coefficient de diffusion D.

☞ *Réponses partielles*

1. b) $\vec{E}(M) = \dfrac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$; $\vec{\Pi} = \vec{0}$. c) $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}Q(t) = 0$.

2. b) $\vec{E}(M_{\mathrm{ext}}) = \dfrac{\mu_0 N a^2}{2\ell r\tau}I_0\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\overrightarrow{e_\theta}$. **3.** d) $\Delta\vec{E} = \dfrac{1}{c^2\tau}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.