Corrigé du devoir d'entraînement de physique n° 6

I.1.a) Pour M quelconque de l'espace, le plan (MOz) $\left[\text{ou } \left(M,\overrightarrow{e_\rho},\overrightarrow{e_z}\right)\right]$ est un plan de symétrie pour les courants donc d'antisymétrie pour le champ, donc $\vec{B}(M)\perp(MOz)$ soit $\vec{B}(M)=B_\varphi(M)\overrightarrow{e_\varphi}$. De plus il y a invariance des courants par translation selon (Oz) donc B_φ ne dépend pas de z ; et invariance par rotation autour de (Oz), donc B_φ ne dépend pas de φ. Finalement : $\boxed{\vec{B}(M)=B_\varphi(\rho)\overrightarrow{e_\varphi}}$.

I.1.b) Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle Γ de rayon ρ centré sur (Oz), parcouru dans le sens horaire : $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}=\mu_0 I_{\text{enlacée}}$. La circulation vaut : $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}=\int_0^{2\pi} B_\varphi(\rho)\overrightarrow{e_\varphi}\cdot\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}=B_\varphi(\rho)2\pi\rho$. Pour $\rho<a$, $I_{\text{enlacée}}=0$ car aucun courant ne traverse Γ. Pour $\rho>b$, $I_{\text{enlacée}}=-I+I=0$. Dans les deux cas, on obtient donc $B_\varphi(\rho)2\pi\rho=0$ d'où $\boxed{\vec{B}(M)=\vec{0}}$.

I.1.c) Pour $a<\rho<b$, $I_{\text{enlacée}}=+I$ (courant I vers le haut, sens de la normale). Donc $B_\varphi(\rho)2\pi\rho=+\mu_0 I$ d'où $\boxed{\vec{B}(M)=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\overrightarrow{e_\varphi}}$.

I.2.a) $\Phi=\iint_\Sigma \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\int_{\rho=a}^{\rho=b}\int_{z=0}^{z=l}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\overrightarrow{e_\varphi}\cdot\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\overrightarrow{e_\varphi}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}l\int_{\rho=a}^{\rho=b}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$ soit $\boxed{\Phi=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}l\ln\dfrac{b}{a}}$.

I.2.b) Par définition de l : $\boxed{\Phi=LI}$. On a donc trouvé $\boxed{L=\dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}}$. **I.2.c)** AN $\boxed{L=2{,}2\cdot10^{-7}\ \text{H}}$. **I.2.d)** AN $\boxed{L=4{,}9\cdot10^{-8}\ \text{H}}$.

I.3.a) Un conducteur électrique (cylindrique), parcouru par un courant (axial), crée un champ magnétique, et celui-ci entraîne une force de Lorentz exercée sur les porteurs de charges, qui tend à écraser le conducteur sur lui-même. En effet, pour un courant positif selon (Oz), le champ magnétique est dirigé selon $\overrightarrow{e_\varphi}$, et la force sur un porteur est alors $\overrightarrow{F_\text{L}}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$ de direction $\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_\varphi}=-\overrightarrow{e_\rho}$.

I.3.b) Le mot *pinch* désigne la striction magnétique dans un plasma, et plus particulièrement sa deuxième phase, dite *de stagnation*, où il est confiné sur son axe. Le préfixe *Z*- indique que le courant est axial.

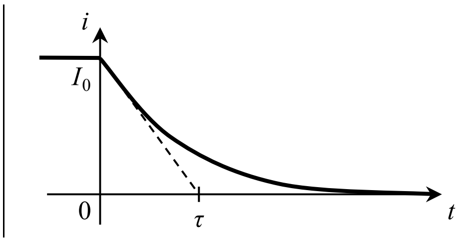
I.3.c) La fusion nucléaire est un phénomène dans lequel deux noyaux légers se réunissent pour former un noyau plus lourd. Cela nécessite de vaincre la répulsion électrique entre les noyaux : il faut pour cela atteindre une température très élevée et une densité très élevée, ce qui peut être obtenu avec la technique de Z-pinch.

I.4.a) Il faut tout d'abord stocker une quantité d'énergie la plus grande possible ; puis la restituer sur la durée la plus courte possible.

I.4.b) $\boxed{\mathcal{P}=\dfrac{\mathcal{E}}{\tau}=10^{13}\ \text{W}=10\ \text{TW}}$. Un réacteur de centrale nucléaire à une puissance de l'ordre de 10^8 à 10^9 W, beaucoup plus faible que la puissance de la machine évoquée ici.

I.5.a) On place l'intensité par exemple dans le sens horaire, et deux tensions en sens contraire (convention récepteur). Loi des mailles pour $t>0$: $u_L+u_r=0$ soit $\boxed{L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+ri=0}$.

I.5.b) Solution générale : $i(t)=A\exp\left(-\dfrac{rt}{L}\right)$. À l'instant initial, il y a continuité de l'intensité : $i(0^+)=i(0^-)$ soit $A=I_0$. Finalement : $\boxed{i(t)=I_0\exp\left(-\dfrac{rt}{L}\right)}$.



I.5.c) La solution peut s'écrire $i(t)=I_0\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\boxed{\tau=\dfrac{L}{r}}$.

I.5.d) Pour $r\to0$, $\tau\to\infty$ c'est-à-dire que la décroissance est infiniment lente : on peut considérer que l'intensité reste constante.

I.5.e) Puisque $\Phi(t)=L\,i(t)$, le flux magnétique est conservé.

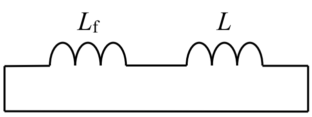
I.5.f) D'après la loi de Faraday, $e_\text{i}(t)=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ donc ici $\boxed{e_\text{i}(t)=0}$.

I.6.a) On applique comme précédemment la loi des mailles au circuit, comportant la FÉM $e_\text{i}(t)$ (qui modélise le comportement inductif du circuit) et une résistance r (qui modélise son comportement résistif) : $e_\text{i}(t)-ri=0$. Si $r=0$, alors $\boxed{e_\text{i}(t)=0}$.

I.6.b) On raisonne en sens inverse du cas précédent : $e_\text{i}(t)=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=0$ donc $\boxed{\Phi=\text{cte}}$.

I.6.c) $\Phi=L(t)i(t)=\text{cte}$ donc on peut augmenter fortement l'intensité i en diminuant l'inductance L. Pour cela, il faut faire tendre b vers a ou inversement, ce qui correspond bien à comprimer le conducteur.

I.7.a) Si on néglige toujours la résistance, le circuit comporte uniquement les deux inductances :



I.7.b) Les inductances en série s'ajoutent : $\boxed{L_\text{éq}=L_\text{f}+L}$.

I.7.c) On adapte la formule du **I.2.b** : $\boxed{L_{\text{éq},0}=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\left(h\ln\dfrac{r}{r_\text{b}}+H\ln\dfrac{R_0}{r_\text{b}}\right)}$.

I.7.d) $\Phi=L_{\text{éq},0}I_0$ soit $\boxed{\Phi=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(h\ln\dfrac{r}{r_\text{b}}+H\ln\dfrac{R_0}{r_\text{b}}\right)}$.

I.8.a) Dans l'expression de $L_{\text{éq},0}$ on remplace R_0 par r_b, ce qui fait disparaître le second terme : $\boxed{L_{\text{éq,f}}=\dfrac{\mu_0}{2\pi}h\ln\dfrac{r}{r_\text{b}}}$.

$\Phi=\text{cte}=L_{\text{éq},0}I_0=L_{\text{éq,f}}I_\text{max}$ donc $\boxed{\dfrac{I_\text{max}}{I_0}=\dfrac{L_{\text{éq},0}}{L_{\text{éq,f}}}=1+\dfrac{H\ln\left(R_0/r_\text{b}\right)}{h\ln\left(r/r_\text{b}\right)}}$.

I.8.b) Il faut donc choisir $\boxed{H\gg h}$.

I.8.c) Il faut également prendre $\boxed{r \approx r_b}$ et $\boxed{R_0 \gg r_b}$.

I.8.d) AN $\boxed{\dfrac{I_{max}}{I_0} = 110}$ d'où $\boxed{I_{max} = 130\ \text{MA}}$.

I.9.a) Formule générale : $\boxed{E = \dfrac{1}{2} L I^2}$.

I.9.b) $\boxed{E_0 = \dfrac{1}{2} L_{éq,0}\, I_0^2}$ et $\boxed{E_f = \dfrac{1}{2} L_{éq,f}\, I_{max}^2}$.

I.9.c) $\Delta E = E_f - E_0 = \dfrac{1}{2} L_{éq,f}\, I_{max}^2 - \dfrac{1}{2} L_{éq,0}\, I_0^2 = \dfrac{1}{2} L_{éq,0}\, I_0^2 \left(\dfrac{L_{éq,0}}{L_{éq,f}} - 1 \right)$ soit $\boxed{\Delta E = \alpha\, E_0}$ avec $\boxed{\alpha = \dfrac{L_{éq,0}}{L_{éq,f}} - 1}$.

I.10.a) On peut écrire $\Delta E = \left(\dfrac{I_{max}}{I_0} - 1 \right) E_0$. Pour ΔE donnée, en diminuant E_0 <u>on obtient une amplification en courant plus grande</u>.

I.10.b) Avec $\Phi = \text{cte} = L_{éq,0} I_0$ on peut écrire $E_0 = \dfrac{1}{2} \Phi I_0 = \dfrac{1}{2} \dfrac{\Phi^2}{L_{éq,0}}$. Ces deux expressions montrent que pour minimiser E_0, à flux fixé, on doit <u>minimiser</u> I_0 et <u>maximiser</u> $L_{éq,0}$.

I.10.c) $\Delta E_{disp} = \dfrac{1}{2} L_{éq,0}\, I_{0,opt}^2 \left(\dfrac{L_{éq,0}}{L_{éq,f}} - 1 \right)$ d'où $\boxed{I_{0,opt} = \sqrt{\dfrac{2\,\Delta E_{disp} L_{éq,f}}{L_{éq,0}(L_{éq,0} - L_{éq,f})}}}$.

I.10.d) AN $\boxed{I_{0,opt} = 0{,}8\ \text{MA}}$