Ém5 – Corrigé de l'exercice 2

¤ Exercice 2

a) On adapte la formule établie en cours (Ém4) : $\boxed{\vec{B}(M_{\text{int}},t)=\mu_0\dfrac{N}{\ell}i(t)\vec{e_z}=\mu_0\dfrac{N}{\ell}I_0\exp(-t/\tau)\vec{e_z}}$ et $\boxed{\vec{B}(M_{\text{ext}},t)=\vec{0}}$.

L'inductance est définie par $\Phi(t)=L\,i(t)$ où $\Phi(t)$ est le flux du champ $\vec{B}(M_{\text{int}},t)$ à travers toutes les spires. Ce champ étant uniforme dans le solénoïde, on obtient simplement : $\Phi(t)=N\times\mu_0\dfrac{N}{\ell}i(t)\times\pi a^2$, d'où $\boxed{L=\mu_0\pi a^2\dfrac{N^2}{\ell}}$.

b) Loi intégrale de Faraday : $\oint_\Gamma\vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\Sigma\vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s$. Pour pouvoir l'utiliser, on simplifie d'abord l'expression de $\vec{E}(M,t)$ avec les éléments de symétrie. Pour un point M quelconque, le plan (MOz) est un plan d'antisymétrie pour les courants et de symétrie pour le champ magnétique, donc d'antisymétrie pour le champ électrique (vrai vecteur) : $\vec{E}(M,t)$ est orthogonal à ce plan, soit $\vec{E}(M,t)=E_\theta(M,t)\vec{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques. De plus, compte tenu des invariances par translation et par rotation d'axe (Oz) : $\vec{E}(M,t)=E_\theta(r,t)\vec{e_\theta}$. On choisit alors pour le contour Γ un cercle d'axe (Oz) et de rayon r : $\oint_\Gamma\vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}=E_\theta(r,t)2\pi r$.

Pour le flux de $\vec{B}$ il faut distinguer deux cas. Si M est à l'intérieur du solénoïde ($r<a$) : $\iint_\Sigma\vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=B(M_{\text{int}},t)\pi r^2=\mu_0\dfrac{N}{\ell}i(t)\pi r^2$ donc $E_\theta(r,t)2\pi r=-\mu_0\dfrac{N}{\ell}\pi r^2\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ soit $\boxed{\vec{E}(M_{\text{int}},t)=\dfrac{\mu_0N}{2\ell\tau}I_0\exp(-t/\tau)r\,\vec{e_\theta}}$. Si M est à l'extérieur du solénoïde ($r>a$) :

$\iint_\Sigma\vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=B(M_{\text{int}},t)\pi a^2=\mu_0\dfrac{N}{\ell}i(t)\pi a^2$ donc $E_\theta(r,t)2\pi r=-\mu_0\dfrac{N}{\ell}\pi a^2\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ soit $\boxed{\vec{E}(M_{\text{ext}},t)=\dfrac{\mu_0N}{2\ell\tau}I_0\exp(-t/\tau)\dfrac{a^2}{r}\vec{e_\theta}}$.

À l'extérieur le champ $\vec{E}$ n'est pas nul, ce qui peut sembler étonnant car il n'y a ni charges ni champ magnétique. Mais en fait ce n'est pas contradictoire avec les équations de Maxwell. En effet, $\operatorname{div}\vec{E}(M_{\text{ext}},t)=\dfrac{\mu_0N}{2\ell\tau}I_0\exp(-t/\tau)a^2\operatorname{div}\left(\dfrac{1}{r}\vec{e_\theta}\right)$

$=\dfrac{\mu_0N}{2\ell\tau}I_0\exp(-t/\tau)a^2\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(1/r)}{\partial\theta}=0$, ce qui est bien compatible avec l'équation de Maxwell–Gauss $\left(\operatorname{div}\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}=0\right)$.

Et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=-\dfrac{\partial E_\theta}{\partial z}\vec{e_r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\vec{e_z}=\dfrac{\mu_0N}{2\ell\tau}I_0\exp(-t/\tau)a^2\left(-\dfrac{\partial(1/r)}{\partial z}\vec{e_r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(1)}{\partial r}\vec{e_z}\right)=\vec{0}$, ce qui est bien compatible avec l'équation de Maxwell–Faraday $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0}\right)$.

c) $u_{\text{ém}}=\dfrac{\varepsilon_0E^2}{2}+\dfrac{B^2}{2\mu_0}=\dfrac{\varepsilon_0\mu_0^2N^2}{8\ell^2\tau^2}I_0^2\exp(-2t/\tau)r^2+\dfrac{\mu_0N^2}{2\ell^2}I_0^2\exp(-2t/\tau)=\dfrac{\mu_0N^2}{2\ell^2}I_0^2\exp(-2t/\tau)\left[\dfrac{\varepsilon_0\mu_0r^2}{4\tau^2}+1\right]$. On veut donc montrer que $\dfrac{\varepsilon_0\mu_0r^2}{4\tau^2}\ll1$ soit $\dfrac{r^2}{4c^2\tau^2}\ll1$. Or dans l'ARQS, la dimension r du solénoïde vérifie $r\ll c\tau$, ce qui donne bien l'approximation cherchée : <u>le terme électrique de l'énergie stockée est négligeable devant le terme magnétique</u>.

d) $\vec{\Pi}(M,t)=\dfrac{\vec{E}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t)}{\mu_0}$, donc $\boxed{\vec{\Pi}(M_{\text{ext}},t)=\vec{0}}$ et $\boxed{\vec{\Pi}(M_{\text{int}},t)=\dfrac{\mu_0N^2r}{2\ell^2\tau}I_0^2\exp(-2t/\tau)\vec{e_r}}$.

e) $\Phi\left(\vec{\Pi}\right)_{C^-}=\iint_{C^-}\vec{\Pi}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\iint_{C^-}\Pi_r(a^-)\vec{e_r}\cdot\vec{e_r}\,\mathrm{d}s=\Pi_r(a^-)\iint_{C^-}\mathrm{d}s=\Pi_r(a^-)2\pi a\ell$ soit $\boxed{\Phi\left(\vec{\Pi}\right)_C=\dfrac{\mu_0N^2\pi a^2}{\ell\tau}I_0^2\exp(-2t/\tau)}$.

Or l'énergie stockée est $\mathcal{E}_{\text{mag}}(t)=\dfrac{1}{2}Li(t)^2=\dfrac{1}{2}\mu_0\pi a^2\dfrac{N^2}{\ell}I_0^2\exp(-2t/\tau)$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{\tau}\mu_0\pi a^2\dfrac{N^2}{\ell}I_0^2\exp(-2t/\tau)$. On trouve donc bien $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t}=-\Phi\left(\vec{\Pi}\right)_{C^-}}$, ce qui exprime le bilan d'énergie électromagnétique dans ce cylindre (le signe – étant dû au fait que le flux du vecteur de Poynting est sortant).

f) Maintenant on est juste à l'extérieur du solénoïde : $\vec{\Pi}=\vec{0}$ donc $\boxed{\Phi\left(\vec{\Pi}\right)_{C^+}=0}$. Or l'énergie magnétique stockée dans le cylindre C^+ est la même que dans le cylindre C^- puisqu'ils ont le même rayon a (à un infiniment petit près) : où est donc passée l'énergie magnétique ? Elle est dans le troisième terme du bilan, celui de <u>l'énergie transmise aux charges mobiles</u> : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{mag}}}{\mathrm{d}t}=-\iiint_V\vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$.

En effet, le cylindre C^+ contient les spires du solénoïde (constituées de métal bon conducteur), alors que le cylindre C^- ne les contenait pas.