Exercices du chapitre On2

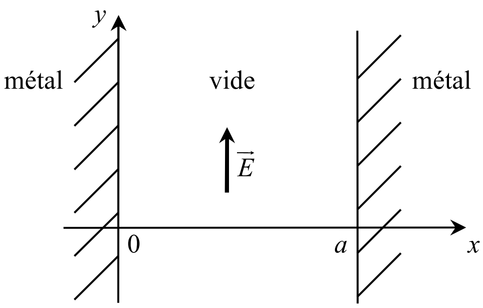
Ondes électromagnétiques dans le vide

1. Onde électromagnétique entre deux conducteurs

Dans un espace vide compris entre deux miroirs plans métalliques parfaitement conducteurs, situés aux abscisses $x = 0$ et $x = a$, se trouve une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 f(x)\cos(\omega t)\vec{e_y}\ .$$

On précise que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un métal parfaitement conducteur, et que de part et d'autre d'une surface, la composante normale du champ $\vec{B}$ et la composante tangentielle du champ $\vec{E}$ sont continues.



a) Énoncer les équations de Maxwell dans le vide, et en déduire l'équation de D'Alembert vérifiée par $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
b) Déduire de l'une des équations de Maxwell la forme du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$. L'onde est-elle transverse ?
c) Quelles conditions sur $f(x)$ obtient-on avec les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = a$?
d) Déterminer la fonction $f(x)$ et montrer que la pulsation ω est nécessairement quantifiée.
e) Déterminer complètement $\vec{B}$.
f) Calculer l'énergie électrique $\mathcal{E}_E$ et l'énergie magnétique $\mathcal{E}_B$ contenues dans un volume cylindrique d'axe (Ox), de section de base S, compris entre $x = 0$ et $x = a$. En déduire qu'il y a un échange périodique entre ces deux formes d'énergies.

2. Valeurs numériques pour un laser

Un faisceau laser dans le vide est modélisé par une OPPH se propageant selon l'axe (Oz), vers les z croissants.
a) Écrire l'expression vectorielle (réelle) de son champ électrique, en déduire celle de son champ magnétique puis celle du vecteur de Poynting.
b) Calculer les amplitudes des deux champs dans le cas d'un laser à argon ionisé ($\lambda = 488$ nm) qui émet un faisceau cylindrique de section 1,5 mm², de puissance moyenne 1,0 W.
On donne $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$, $\mu_0 = 1{,}257\cdot10^{-6}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$.

3. États de polarisation

On considère différentes OPPH électromagnétiques dans le vide, dont les champs électriques ont pour expressions complexes, dans la base cartésienne $\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$:

$$\vec{E_1}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\left|\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right. \quad ; \qquad \vec{E_2}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)}\left|\begin{matrix}0\\1\\i\end{matrix}\right.$$

$$\vec{E_3}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t + kx)}\left|\begin{matrix}0\\1\\i\end{matrix}\right. \quad ; \qquad \vec{E_4}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - ky)}\left|\begin{matrix}0\\0\\i\end{matrix}\right.$$

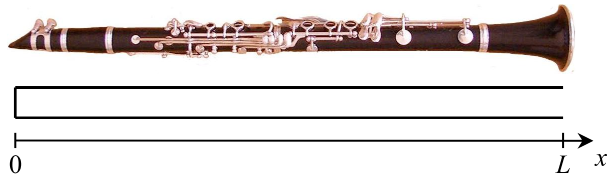
où E_0 est une constante réelle positive.

a) Préciser la direction et le sens de propagation de chaque onde. Déterminer les expressions réelles de ces champs, et en déduire l'état de polarisation de chaque onde (rectiligne, circulaire droite ou gauche, elliptique).
b) Pour chaque onde, calculer le champ magnétique et le vecteur de Poynting ; vérifier la direction et le sens de celui-ci.

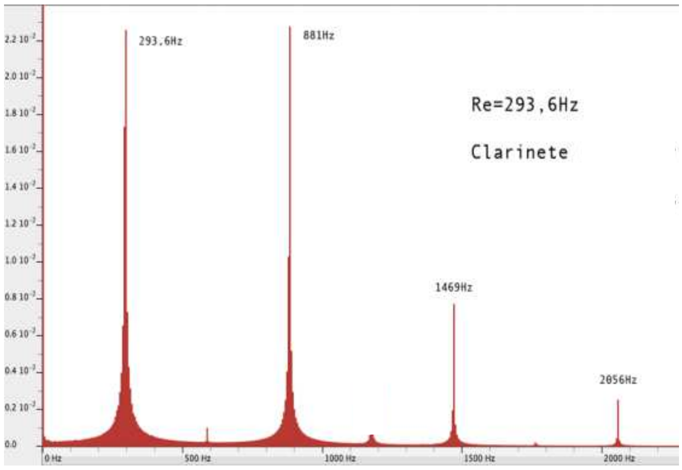
Ondes acoustiques dans un fluide

4. Onde acoustique dans un tuyau sonore : clarinette

Un instrument de musique à anche et de perce cylindrique, comme la clarinette, peut être modélisé en première approximation comme un tuyau cylindrique, de diamètre D et de longueur L, fermé à une extrémité et ouvert à l'autre.



Lorsqu'on joue une note, une onde stationnaire s'établit dans le tuyau ; une petite partie de l'énergie de cette onde est transmise à l'extérieur, mais la pression acoustique pour $x > L$ a une amplitude très faible devant celle à l'intérieur du tube.
a) Rappeler les deux équations couplées reliant la vitesse $v_x(x,t)$ et la surpression $p(x,t)$ pour l'onde acoustique 1D.
b) Donner la forme d'une onde stationnaire (nécessairement sinusoïdale) pour la surpression. En déduire, à partir de l'équation de Navier–Stokes linéarisée, la forme de la vitesse, puis celle du déplacement $\xi(x,t)$.
c) Quelles sont les conditions aux limites aux extrémités du tuyau ? En déduire les fréquences possibles. Vérifier que ce modèle correspond au spectre expérimental ci-dessous.



d) Représenter l'allure de $p(x,t)$ et de $\xi(x,t)$ pour les deux premiers modes propres, à un instant d'amplitude maximale.

5. Onde acoustique sphérique

a) Rappeler l'équation de D'Alembert 3D pour la surpression.
b) En coordonnées sphériques, le laplacien peut s'écrire : $\Delta p = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(r\,p)}{\partial r^2}$ pour une fonction $p(r,t)$. Montrer que la fonction $r\,p(r,t)$ obéit à l'équation de D'Alembert 1D, et en déduire la forme de $p(r,t)$ ainsi que la relation de dispersion.
c) Déterminer le champ de vitesse, et le simplifier dans le cas $r \gg \lambda$ (où λ est la longueur d'onde). À quelles distances cette approximation est-elle correcte pour une voix dans l'air ?
d) Si le niveau sonore vaut 40 dB à 10 m, que vaut-il à 30 m ?

☞ *Réponses partielles*

1. b) $\overrightarrow{B} = -\dfrac{E_0}{\omega}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\sin(\omega t)\overrightarrow{e_z}$. d) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\omega}{c}x\right)$. f) $\mathcal{E}_E = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 S\, a\cos^2(\omega t)}{4}$.

4. a) $p(x,t) = A\cos(kx+\psi)\cos(\omega t+\varphi)$; $v_x(x,t) = \dfrac{A}{\rho_0 c}\sin(kx+\psi)\sin(\omega t+\varphi)$.