On1 – Corrigé des exercices 2 à 5

¤ Exercice 2

a) b) Voir cours. On trouve $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}}}$. AN $\boxed{c = 2{,}1\cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$. C'est une vitesse légèrement inférieure à celle des ondes électromagnétiques dans le vide, comme s'y attend pour cette onde électromagnétique dans un milieu isolant. Son indice est défini par : $\boxed{n = \dfrac{c_{\text{vide}}}{c}}$. AN $\boxed{n = 1{,}4}$.

c) Voir cours. On trouve $\boxed{Z_\text{c} = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\gamma}}}$. Dans l'autre sens : $u(x,t) = -Z_\text{c}\, i(x,t)$.

d) D'après la question précédente : $\boxed{\underline{u}(x,t) = +Z_\text{c}\underline{I}_\text{i}\exp[j(\omega t - kx)] - Z_\text{c}\underline{I}_\text{r}\exp[j(\omega t + kx)]}$.

e) En $x = 0$, $\boxed{\underline{u}(0,t) = \underline{Z}\times\underline{i}(0,t)}$ aux bornes de l'impédance terminale.

Cela équivaut à : $+Z_\text{c}\underline{I}_\text{i}\exp[j\omega t] - Z_\text{c}\underline{I}_\text{r}\exp[j\omega t] = \underline{Z}(\underline{I}_\text{i}\exp[j\omega t] + \underline{I}_\text{r}\exp[j\omega t])$. On divise tout par $\underline{I}_\text{i}\exp[j\omega t]$: $+Z_\text{c} - Z_\text{c}\underline{r}_i = \underline{Z}(1+\underline{r}_i)$ d'où $\boxed{\underline{r}_i = \dfrac{Z_\text{c} - \underline{Z}}{Z_\text{c} + \underline{Z}}}$. Et comme $\underline{U}_\text{i} = +Z_\text{c}\underline{I}_\text{i}$ et $\underline{U}_\text{r} = -Z_\text{c}\underline{I}_\text{r}$, on obtient $\boxed{\underline{r}_u = -\underline{r}_i = \dfrac{\underline{Z} - Z_\text{c}}{\underline{Z} + Z_\text{c}}}$.

f) Pour $\underline{Z} = 0$ (deux bornes reliées entre elles) : $\boxed{\underline{r}_u = -1}$. Pour $\underline{Z} \to \infty$ (extrémité à vide) : $\boxed{\underline{r}_u = +1}$.

g) Pour $\underline{Z} = Z_\text{c}$: $\boxed{\underline{r}_u = 0}$, il n'y a pas d'onde réfléchie. C'est le cas le plus intéressant en général (adaptation d'impédance), puisque le signal est entièrement absorbé par le dipôle récepteur et ne repart pas du tout vers l'émetteur.

¤ Exercice 3

a) Voir cours. On trouve $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$.

b) Pour une onde stationnaire obéissant à l'équation de D'Alembert, la déformation est de la forme $\boxed{\xi(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)}$. Or la force de traction/compression s'écrit $T_x(x,t) = ES\dfrac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$ (voir démo du cours), ce qui donne $\boxed{T_x(x,t) = -kESA\cos(\omega t + \varphi)\sin(kx + \psi)}$.

c) Les deux extrémités sont libres, et ne subissent donc pas de force de traction/compression : $\boxed{T_x(0,t) = T_x(L,t) = 0, \forall t}$.

On en déduit d'une part $\sin(\psi) = 0$, on peut donc prendre $\psi = 0$; d'autre part, $\sin(kL) = 0$, d'où la condition de quantification $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$. La relation de dispersion étant (pour une onde stationnaire obéissant à l'équation de D'Alembert) $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi f}{c}$, on en déduit les fréquences propres $\boxed{f_n = \dfrac{nc}{2L}}$.

d) La fréquence fondamentale permet de calculer $c = 2Lf_1$. Or $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ donc $\boxed{E = \rho c^2 = 4\rho L^2 f_1^2}$. AN $\boxed{E = 5{,}72\ \text{GPa}}$.

¤ Exercice 4

a) Onde incidente : $\boxed{y_\text{i}(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)}$ soit $y_\text{i}(x,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{A}_\text{i}(x)\exp(j\omega t)\right]$ avec $\boxed{\underline{A}_\text{i}(x) = A\exp(-jkx + \varphi)}$.

Onde réfléchie : $\boxed{y_\text{r}(x,t) = B\cos(\omega t + kx + \psi)}$ soit $y_\text{r}(x,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{A}_\text{r}(x)\exp(j\omega t)\right]$ avec $\boxed{\underline{A}_\text{r}(x) = B\exp(+jkx + \psi)}$.

En un point quelconque, l'onde résultante est $y(x,t) = y_\text{i}(x,t) + y_\text{r}(x,t)$, d'où $\underline{A}(x) = \underline{A}_\text{i}(x) + \underline{A}_\text{r}(x)$.

b) Si on néglige son poids, la masse m est soumise à la réaction de la tige verticale, qui est normale en l'absence de frottement (soit $\vec{R} = R_x\vec{e_x} + R_z\vec{e_z}$) et à la tension de l'extrémité de la corde, exercée par la gauche sur la droite, soit $-\vec{T}(0,t)$ avec la notation du cours.

PFD pour la masse m : $m\vec{a} = \vec{R} - \vec{T}(0,t)$. Projection sur $\vec{e_y}$ (vertical ascendant) : $m\dfrac{\mathrm{d}^2 y(0,t)}{\mathrm{d}t^2} = 0 - T_y(0,t)$. Or on a montré dans le cours la relation : $T_y(x,t) = T\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$. L'équation différentielle peut donc s'écrire : $m\dfrac{\mathrm{d}^2 y(0,t)}{\mathrm{d}t^2} = -T\dfrac{\partial y(0,t)}{\partial x}$. En notation complexe, cette équation devient : $-m\omega^2\left[\underline{A}_\text{i}(0) + \underline{A}_\text{r}(0)\right] = -T\left[-jk\underline{A}_\text{i}(0) + jk\underline{A}_\text{r}(0)\right]$ soit $\underline{A}_\text{i}(0)\left[m\omega^2 + Tjk\right] = \underline{A}_\text{r}(0)\left[-m\omega^2 + Tjk\right]$ et finalement : $\boxed{\underline{r} = \dfrac{\underline{A}_\text{r}(0)}{\underline{A}_\text{i}(0)} = \dfrac{jTk + m\omega^2}{jTk - m\omega^2}}$.

c) • Cas $m \to 0$, c'est-à-dire si l'extrémité de la corde est libre : $\boxed{\underline{r} \to 1}$.

• Cas $m \to \infty$, c'est-à-dire si l'extrémité de la corde est fixée : $\boxed{\underline{r} \to -1}$.

d) On suppose $y(0,t) = 0, \forall t$. Cela équivaut à $\underline{A}(0) = \underline{A}_\text{i}(0) + \underline{A}_\text{r}(0) = 0$ soit $\underline{A}_\text{r}(0) = -\underline{A}_\text{i}(0)$, d'où $\boxed{\underline{r} = -1}$.

Or $\underline{A}_\text{r}(x) = \underline{A}_\text{r}(0)\exp(+jkx)$ et $\underline{A}_\text{i}(x) = \underline{A}_\text{i}(0)\exp(-jkx)$, donc $\underline{A}(x) = \underline{A}_\text{r}(0)\left[\exp(+jkx) - \exp(-jkx)\right] = -2j\underline{A}_\text{i}(0)\sin(kx)$.

L'onde réelle est alors : $y(x,t)=\mathrm{Re}\left[\underline{A}(x)\exp(j\omega t)\right]=\mathrm{Re}\left[-2j\underline{A}_{\mathrm{i}}(0)\sin(kx)\exp(j\omega t)\right]=\mathrm{Re}\left[-2jA\exp(j\varphi)\sin(kx)\exp(j\omega t)\right]$ soit $y(x,t)=\mathrm{Re}\left[2A\exp(j(\omega t+\varphi-\pi/2))\sin(kx)\right]=2A\cos(\omega t+\varphi-\pi/2)\sin(kx)$ et finalement $\boxed{y(x,t)=2A\sin(\omega t+\varphi)\sin(kx)}$ (on pourrait renommer $2A$ en A, et remplacer le sinus temporel par un cosinus en changeant l'origine des temps). On reconnaît la forme caractéristique d'une <u>onde stationnaire</u> : produit *réel* d'une fonction sinusoïdale temporelle et d'une fonction sinusoïdale spatiale.

¤ <u>Exercice 5</u>

a) On applique le PFD à l'atome numéroté n, soumis aux forces d'interaction avec ses deux voisins (on néglige le poids) : $m\vec{a}=\vec{F}_{(n-1)\to n}+\vec{F}_{(n+1)\to n}$. Chaque force, modélisée comme celle d'un ressort, s'exprime selon la formule générale $\vec{F}=-k(\ell-\ell_0)\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}}$. Pour le ressort de gauche : $\ell_0=a$, $\ell=a+\xi_n-\xi_{n-1}$ et $\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}}=\vec{e_x}$ donc $\vec{F}_{(n-1)\to n}=-k(\xi_n-\xi_{n-1})\vec{e_x}$. Pour celui de droite : $\ell_0=a$, $\ell=a+\xi_{n+1}-\xi_n$ et $\vec{e}_{\text{ressort}\to\text{point}}=-\vec{e_x}$ donc $\vec{F}_{(n+1)\to n}=+k(\xi_{n+1}-\xi_n)\vec{e_x}$.

La projection du PFD sur $\vec{e_x}$ est donc : $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2\xi_n}{\mathrm{d}t^2}=-k(\xi_n-\xi_{n-1})+k(\xi_{n+1}-\xi_n)}$.

b) $\xi((n+1)a,t)=\xi(na,t)+a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)$ et $\xi((n-1)a,t)=\xi(na,t)-a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)+\dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)$.

c) L'équation devient : $m\dfrac{\partial^2\xi(na,t)}{\partial t^2}=-k\left(\xi(na,t)-\xi((n-1)a,t)\right)+k\left(\xi((n+1)a,t)-\xi(na,t)\right)$

$$=-k\left(\cancel{+a\frac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)}-\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)\right)+k\left(\cancel{+a\frac{\partial\xi}{\partial x}(na,t)}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)\right)=+ka^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(na,t)$$

soit $\boxed{\dfrac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}=0}$ (équation de D'Alembert) en posant $\boxed{c=a\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$: c'est la <u>célérité</u> de l'onde.

d) Avec un modèle macroscopique on a trouvé $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$. Or on a établi (voir cours) la relation $E=\dfrac{k}{a}$, et d'autre part $\rho=\dfrac{m}{a^3}$ (car chaque maille cubique de côté a contient un atome de masse m), donc les deux expressions sont bien identiques.