# Exercices du chapitre On3

### *Onde électromagnétique dans un conducteur*

**1. Différentes formes d'ondes dans un métal**

Le cuivre est un métal comportant une densité volumique $n^* = 8{,}5\cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}$ d'électrons libres ( $-e = -1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{C}$ , $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}$ ). L'interaction d'un électron avec le milieu est modélisée par une force $\overrightarrow{F_\text{f}} = -m\vec{v}/\tau$ avec $\tau = 2{,}7\cdot 10^{-14}\ \text{s}$ . Une OPPH polarisée rectilignement se propage dans ce métal : son champ électrique a pour expression complexe $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}_0 \exp i(\omega t - \underline{k} z)\,\overrightarrow{e_x}$ .

a) Montrer, en précisant les hypothèses et les approximations, que l'on peut définir une conductivité complexe, que l'on mettra sous la forme : $\underline{\gamma} = \dfrac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}$. Calculer $\gamma_0$ .

b) Établir la relation de dispersion pour cette onde, et la mettre sous la forme : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - i\dfrac{\omega_\text{p}^2\tau}{\omega(1+i\omega\tau)}\right)$. Calculer $\omega_\text{p}$ .

c) Vérifier qu'on a $\omega \ll 1/\tau \ll \omega_\text{p}$ pour les ondes hertziennes. Montrer alors que $\underline{k}$ peut s'écrire $(1-i)/\delta$ , et en déduire la forme réelle de l'onde. Comment peut-on la qualifier ?

d) Vérifier qu'on a $1/\tau \ll \omega < \omega_\text{p}$ pour la lumière visible. Montrer alors que $\underline{k}$ peut s'écrire $-i/\delta'$ , et en déduire la forme réelle de l'onde. Comment peut-on la qualifier ?

e) Vérifier qu'on a $1/\tau \ll \omega_\text{p} < \omega$ pour les ultraviolets lointains. Montrer alors qu'il y a propagation avec dispersion mais sans absorption.

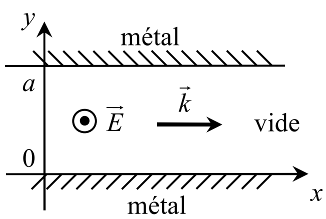
f) Vérifier qu'on a $1/\tau \ll \omega_\text{p} \ll \omega$ pour les rayons γ. Montrer alors qu'il y a propagation sans dispersion ni absorption, comme dans le vide.

### *Dispersion due aux conditions aux limites*

**2. Onde électromagnétique dans un guide d'onde**

Même pour une onde obéissant à l'équation de D'Alembert, la propagation peut être dispersive si les conditions aux limites imposent de chercher une solution sous une forme différente de celle d'une OPPH. On étudie ceci dans le cas d'un guide d'onde, sorte de « canalisation » constituée de quatre plaques métalliques planes séparées par du vide, permettant la propagation d'une onde électromagnétique dans une direction.


Pour simplifier, on considère ici seulement les deux plaques parallèles supérieure et inférieure, supposées infinies, dont les surfaces sont confondues avec les plans $y = 0$ et $y = a$.




Dans cette région vide se propage une onde caractérisée par son champ électrique, de la forme :
$\vec{E}(M,t) = A(y)\cos(\omega t - kx)\,\overrightarrow{e_z}$ avec $\omega > 0$ et $k > 0$ .

On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans le métal supposé parfaitement conducteur, et que de part et d'autre d'une surface, il y a continuité de la composante normale du champ $\vec{B}$ et de la composante tangentielle du champ $\vec{E}$ .

a) Déduire de l'une des équations de Maxwell la forme du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ . L'onde est-elle transverse ?

b) À quelle équation d'onde obéissent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide ? En déduire l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)A(y) = 0 .$$

c) Déterminer les conditions aux limites pour $A(y)$ . En déduire complètement la fonction en montrant que $\omega$ est nécessairement supérieure à $kc$.

d) Montrer que la relation de dispersion est de type Klein–Gordon : $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \text{cte}$ et donner l'expression des valeurs discrètes $k_n$ que peut prendre $k$ pour $\omega$ donnée. (À chaque valeur de $n$ est associé un *mode propre* du guide d'onde.)

e) Déterminer la valeur minimale de fréquence au-dessous de laquelle l'onde ne peut pas se propager. Calculer cette fréquence pour un guide d'onde de largeur $a$ = 2 cm : dans quel domaine des ondes électromagnétiques se situe-t-elle ?

f) Pour un mode propre donné, déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Représenter ces deux vitesses en fonction de $\omega$.

g) Calculer le vecteur de Poynting puis sa valeur moyenne temporelle, et commenter cette dernière.

### *Dispersion et absorption d'autres ondes*

**3. Influence de la raideur d'une corde**

On considère une corde d'axe ($Ox$), mobile dans le plan ($Oxy$) (tension $T$, masse linéique $\mu$). La raideur de la corde tend à s'opposer à sa courbure : nous admettons que cet effet revient à ajouter, dans le bilan dynamique sur un élément de corde de longueur $\mathrm{d}x$ , une force $\mathrm{d}\vec{F} = -\gamma\dfrac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}\mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_y}$ , où $\alpha$ est l'angle (petit) que fait la corde avec l'horizontale.

a) Établir l'équation de propagation des ondes sur cette corde.

b) On cherche une solution en OPPH sous la forme $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$ . Déterminer la relation de dispersion entre $\omega$ et $k$. Y a-t-il dispersion ? absorption ?

c) La corde, de longueur $L$, est maintenant fixée à ses deux extrémités. Montrer que des ondes stationnaires sont possibles pour des pulsations $\omega_m$ que l'on exprimera en fonction de $\gamma$, $L$, $T$, $\mu$ et d'un entier $m$.

d) Application numérique : avec les valeurs $L = 50{,}00\ \text{cm}$ , $\gamma = 1{,}000\cdot 10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}^2$ , $T = 400{,}0\ \text{N}$ et $\mu = 1{,}000\ \text{g}\cdot\text{m}^{-1}$ , calculer $\omega_1$ et comparer à la valeur obtenue sans prendre en compte la raideur de la corde.

**4. Onde acoustique amortie par viscosité**

On souhaite étudier l'influence de la viscosité sur la propagation d'une onde acoustique dans un fluide. Pour cela, dans l'équation de Navier–Stokes on garde la force volumique de viscosité de cisaillement $\overrightarrow{f_{\text{v},1}} = \eta\Delta\vec{v}$ (avec $\eta$ la viscosité dynamique) et on y ajoute une force volumique de viscosité de compression, car le fluide est nécessairement compressible :

$$\overrightarrow{f_{v,2}} = \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{v}\right)$$, où $\zeta$ est la seconde viscosité.

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique, et les deux autres équations permettant d'établir l'équation d'onde restent inchangées.

a) Pour une onde plane (longitudinale) se propageant selon l'axe ($Ox$), établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la surpression $p(x,t)$.

b) On cherche des solutions en OPPH généralisée (en notation complexe) : $\underline{p}(x,t) = \underline{A}\exp j(\omega t - kx)$.

Établir la relation de dispersion, et en déduire que $k$ est nécessairement complexe.

c) On pose $k = k' - jk''$. Déterminer les expressions littérales de $k'$ et $k''$, en faisant les approximations nécessaires, pour l'air à 20 °C. Données :
$c = 340\ \text{m·s}^{-1}$, $\rho_0 = 1,2\ \text{kg·m}^{-3}$, $\eta = 1,8\cdot 10^{-5}\ \text{Pa·s}$, $\zeta = 0,6\eta$.

d) Donner la forme de l'onde, en complexes puis en réels. Y a-t-il effectivement une dispersion ?

e) Exprimer la distance caractéristique d'absorption $\delta$ et calculer sa valeur pour des sons graves ($f = 100$ Hz) ou pour des sons aigus ($f = 10$ kHz). Commenter.

---

☞ *Réponses partielles*

**1.** b) $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n^* e^2}{\varepsilon_0 m}} = 1,6\cdot 10^{16}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

**2.** c) $A(y) = E_m \sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right)$.

**3.** b) $\omega^2 = \dfrac{T}{\mu}k^2 + \dfrac{\gamma}{\mu}k^4$.

**4.** a) $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \chi_S\left(\zeta + \dfrac{4\eta}{3}\right)\dfrac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t}$ avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$.