# Devoir test de physique n° 6

Cet énoncé comporte trois problèmes. Durée : 4 heures. L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

## Problème A
## Quelques aspects de la physique du piano

Le piano est un instrument de musique à cordes frappées inventé par l'italien Bartolomeo Cristofori au milieu du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et perfectionné principalement au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, le piano à queue moderne ayant atteint sa maturité au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Ce problème se propose d'aborder différents aspects du fonctionnement et de la conception de l'instrument. Les différentes parties sont largement indépendantes.

# I Vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

Lorsque l'instrumentiste frappe une touche du clavier, celle-ci actionne un mécanisme, qui actionne à son tour un marteau[1], qui vient frapper une corde[2]. Celle-ci entre alors en vibration libre (tant que la touche est enfoncée). On s'intéresse donc dans cette partie aux vibrations libres d'une corde du piano.

Sauf avis contraire, on supposera que la corde peut être supposée sans raideur et on négligera toujours les effets de la pesanteur.

La corde de masse linéique $\mu$ est tendue avec la tension $T_0$. Au repos, la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal $(Ox)$. On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement du point de la corde à l'abscisse $x$ à l'instant $t$. L'axe $(Oy)$ est l'axe vertical ascendant.

### *I.A – Mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur*

**I.A.1)** Que signifie l'expression « corde sans raideur » ? Qu'entend-on par « hypothèse des petits mouvements » ?

**I.A.2)** Dans le cadre de l'approximation des petits mouvements, établir les deux équations liant les dérivées partielles par rapport à $t$ et à $x$ de la vitesse transversale d'un point de la corde $v_y(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ et de la projection sur l'axe $(Oy)$ de la force de tension exercée à l'abscisse $x$ par le morceau de corde situé à droite de cette abscisse sur la partie située à gauche $T_y(x,t)$. On fera apparaitre la tension $T_0$ en le justifiant.

**I.A.3)** Montrer que la fonction $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{I.1}$$

Identifier la célérité $c$ des ondes transversales sur la corde et en donner l'expression. Comment s'appelle cette équation ? Citer au moins deux autres phénomènes régis par la même équation.

**I.A.4)** On peut lire dans une documentation technique que « une corde de piano est tendue à 85 kg ». Pouvez-vous en déduire un ordre de grandeur de la tension $T_0$ d'une corde ? Pour une corde en acier donnant la note « La 4 », le diamètre de la corde est de 1,1 mm. La masse volumique de l'acier valant $7{,}8 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, calculer la célérité $c$ des ondes transversales sur la corde.

### *I.B – Modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau sur la corde*

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

**I.B.1)** Qu'appelle-t-on onde stationnaire ? Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (I.1) sont de la forme $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$. Quelle est la relation entre $\omega$ et $k$ ?

**I.B.2)** Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde ? Exprimer les fréquences propres $f_n$ de la corde en fonction de $c$ et $L$. Donner l'expression de la solution $y_n(x,t)$ correspondant au mode propre numéro $n$. Dessiner l'aspect de la corde à plusieurs instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

[1] Les marteaux sont réalisés en bois recouvert de feutre.
[2] Dans le médium et l'aigu, chaque marteau frappe simultanément deux ou trois cordes identiques pour chaque note.

### *I.C – Conséquences sur la conception des cordes d'un piano*

La hauteur du son produit par une corde est fixée par la fréquence $f$ de son mode fondamental $n = 1$. Les 88 notes d'un piano moderne s'échelonnent du « La 0 » (fréquence fondamentale $f = 28\,\mathrm{Hz}$) au « Do 8 » (fréquence fondamentale $f = 4{,}2\,\mathrm{kHz}$).

**I.C.1)** Rappeler la relation liant la longueur $L$ d'une corde à la fréquence de son fondamental $f$.

On rappelle que pour la fréquence fondamentale $f = 262\,\mathrm{Hz}$, on a une longueur de corde $L = 65\,\mathrm{cm}$. Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu ?

**I.C.2)** Les longueurs calculées ci-dessus sont excessives dans le grave (problèmes d'encombrement et de fragilisation de la structure à cette échelle) : en pratique, la longueur d'un piano à queue de concert moderne n'excède pas 3 m (la longueur la plus courante étant autour de 2,75 m). La longueur des cordes obéit assez bien à la loi étudiée au I.C.1 pour les notes au-delà du « Do 4 ». Pour les notes plus graves, on utilise des cordes filées : il s'agit de cordes d'acier, autour desquelles on a enroulé un fil de cuivre. La longueur de corde variant peu dans ce domaine du clavier, expliquer l'intérêt de ce procédé. Pourrait-on envisager de jouer sur la tension $T_0$ des cordes ?

**I.C.3)** On donne la masse volumique du cuivre : $\rho(\mathrm{Cu}) = 9{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. En assimilant l'enroulement de cuivre à une couche homogène d'épaisseur 1 mm recouvrant le cœur d'acier de diamètre 1,6 mm, et pour la tension $T_0 = 850\,\mathrm{N}$, calculer la longueur de la corde du « La 0 » (note la plus grave du piano, de fréquence fondamentale $f = 28\,\mathrm{Hz}$).

**Donnée**

Pour l'accélération de la pesanteur, on prendra $g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

## <u>Problème B</u>
## Dans le ventre du four à micro-ondes

*Des données sont fournies à la fin de l'énoncé de ce problème.*

Depuis son invention, le four à micro-ondes a immédiatement envahi les cuisines des particuliers. On s'intéresse ici à un modèle simplifié de son fonctionnement et de la protection de sa paroi.

| **Document 4 - Découverte du principe du four à micro-ondes** |
| --- |
| L'ingénieur Percy Spencer eut une drôle de surprise alors qu'il travaillait à la mise au point d'un radar en 1945 : sa barre de chocolat se mit à fondre à proximité d'un « magnétron » sous tension ! Un brevet suivit dans la foulée et le premier four à micro-ondes vit le jour deux ans plus tard... <br><br> D'après « La physique par les objets quotidiens » de Cédric Ray et Jean-Claude Poizat <br> *Éditions Belin pour la science. Octobre 2007.* |

La fréquence des ondes utilisées dans un four à micro-ondes est généralement égale à 2,50 GHz.

**Q35.** Justifier, à l'aide d'un calcul, pourquoi les ondes utilisées dans le four à micro-ondes sont qualifiées d'ondes centimétriques.

**Q36.** Les fours à micro-ondes peuvent parfois perturber les liaisons Wi-Fi. Nommer le phénomène responsable de cette perturbation et déduire la fréquence des ondes Wi-Fi en justifiant la réponse.

Dans un modèle approché simplifié, on considérera le four à micro-ondes comme un parallélépipède rectangle d'arêtes parallèles aux axes $Ox$, $Oy$ et $Oz$, $Oz$ étant la verticale ascendante et de faces d'équations : $x = 0$ et $x = d$ ; $y = 0$ et $y = d'$ ; $z = 0$ et $z = d''$ (**figure 3**).

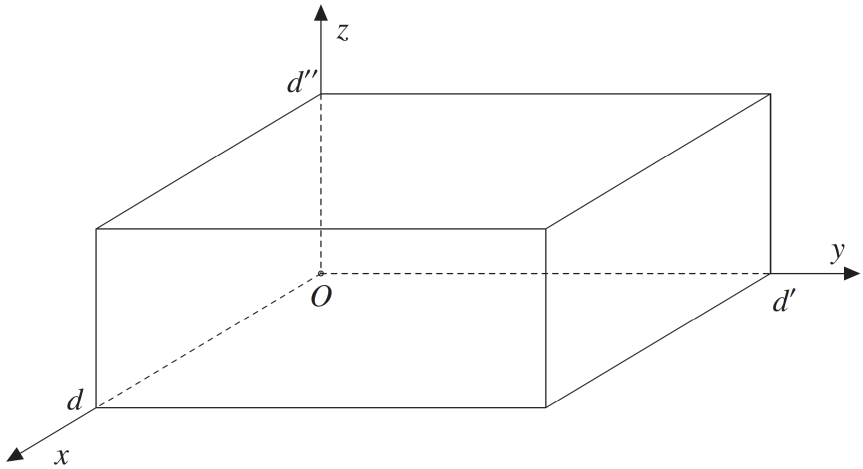


**Figure 3 –** Représentation schématique du four à micro-ondes

On mène une étude simplifiée de l'onde présente dans le four à micro-ondes. On admet que l'onde résultante à l'intérieur du four s'écrit sous la forme

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0(x)\cos(\omega t - kz)\vec{u_y} \tag{2}$$

où $E_0(x)$ n'est pas une constante mais dépend effectivement de $x$, $\omega$ est la pulsation de l'onde et $k$ la norme du vecteur d'onde associé.

On suppose que le four est vide, c'est-à-dire sans aliment et donc rempli d'air, de caractéristiques assimilables avec une excellente approximation à celles du vide.

**Q37.** Écrire les quatre équations de Maxwell dans le vide, sans charge ni courant.

**Q38.** Montrer que l'équation de propagation relative au champ $\vec{E}$ est :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \tag{3}$$

**Q39.** À partir de l'équation (3), déterminer l'équation différentielle que doit nécessairement vérifier $E_0(x)$.

**Q40.** À quelle condition sur $\omega$, $k$ et $c$, la solution de cette équation est-elle oscillante ?
On admet pour la suite que cette condition est satisfaite.

On rappelle la relation de passage du champ électrique $\vec{E}$ à l'interface entre deux milieux différents indicés 1 et 2

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \tag{4}$$

avec $\sigma$ la densité surfacique de charge au niveau de l'interface entre les deux milieux et $\vec{n}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire directeur normal à la surface allant du milieu 1 au milieu 2.

On suppose que les parois du four à micro-ondes sont des parois épaisses constituées de conducteur parfait. On peut montrer que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul.

**Q41.** En déduire que le champ électrique total est nul au niveau des parois $x = 0$ et $x = d$.

**Q42.** Écrire les conditions aux limites que cela impose pour $E_0(x)$.

**Q43.** Montrer que cela entraîne

$$E_0(x) = A\sin\left(n\pi\frac{x}{d}\right)$$

avec $A$ une constante qu'on ne déterminera pas et $n$ un entier.
En déduire la relation de dispersion entre $n$, $d$, $k$ et $\omega$.
Donner l'expression des valeurs discrètes $k_n$ que peut prendre $k$ pour $\omega$ donnée.
(À chaque valeur de $n$ est associé un *mode propre* de la cavité du four.)

**Q44.** Déterminer la valeur minimale de fréquence au-dessous de laquelle l'onde ne peut pas se propager. Calculer cette fréquence pour une cavité de four à micro-ondes de largeur $d = 36$ cm, et vérifier la cohérence avec la fréquence indiquée initialement.

**Q45.** Pour un mode propre donné, déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Quelle est la relation entre ces deux vitesses ?

**Q46.** Calculer le champ magnétique de cette onde.

**Q47.** Définir puis calculer le vecteur de Poynting associé à cette onde. Calculer sa valeur moyenne et commenter l'expression obtenue.

| | |
|---|---|
| **Données** | Vitesse de la lumière : $c = 3,00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$<br>Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$<br>Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$<br>Relation entre $c$, $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ : $c^2\mu_0\varepsilon_0 = 1$<br>Pour un vecteur $\vec{Z}$, on a la formule<br>$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{Z})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{Z})) - \Delta(\vec{Z})$$<br>avec $\Delta(\vec{Z})$, le laplacien du vecteur $\vec{Z}$ |

## Problème C
## Ondes de gravité à la surface de l'eau

On rappelle l'équation d'Euler pour un fluide de masse volumique $\rho$ et non visqueux :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}P$$

A l'équilibre, la surface libre d'une étendue d'eau, plane et horizontale (formant le plan $z = 0$) sépare l'atmosphère (région $z > 0$ où la pression est uniforme et vaut $P_0$) et l'eau, liquide supposé parfait et incompressible de masse volumique $\rho$. L'étendue d'eau est très profonde (profondeur $H$ très grande devant la longueur d'onde des ondes de gravité). On se propose d'étudier la propagation suivant la direction $Ox$ d'une onde de gravité d'amplitude $a$ très inférieure à la longueur d'onde $\lambda$. La surface libre de l'eau est déformée par rapport à la surface à l'équilibre : cette surface a pour équation $z = \xi(x,t)$ (voir la figure 7).

Le champ de vitesse est à l'instant $t$ dans le référentiel lié au fond du bassin :

$$\vec{v} = v_x(x,z,t)\vec{e}_x + v_z(x,z,t)\vec{e}_z$$

La pression au sein du liquide est $P(x,z,t) = P_e(z) + \tilde{p}(x,z,t)$ où $P_e(z)$ est la pression du liquide à l'équilibre en l'absence de vagues et $\tilde{p}(x,z,t)$ désigne la perturbation de la pression par rapport à l'équilibre.

Pour terminer, le champ de pesanteur est supposé uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

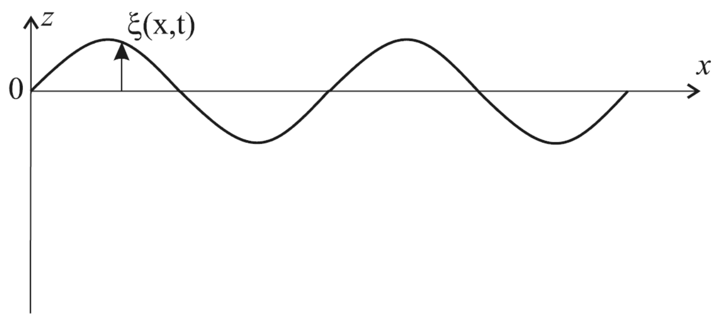


**Figure 7 : ondes de gravité**

**C.1** A quelles conditions le terme $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$ est-il négligeable devant le terme $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ ? On supposera ces conditions vérifiées pour la suite du problème.

**C.2** Que devient l'équation d'Euler dans le cas où le fluide est à l'équilibre ? En déduire le champ de pression $P_e(z)$.

On se limite aux perturbations sinusoïdales du système. On utilise alors la notation complexe :

$$\underline{\tilde{p}} = f(z)e^{j(\omega t - kx)}\ ,\ \underline{\vec{v}} = \vec{v}(z)e^{j(\omega t-kx)},\ \underline{\xi}(x,t) = a\,e^{j(\omega t-kx)}\ \text{ avec } j^2=-1.$$

**C.3** En utilisant l'équation d'Euler et l'équation différentielle de conservation de la masse, montrer que $\rho\dfrac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,\underline{\tilde{p}}$ puis que $\dfrac{d^2 f(z)}{dz^2} - \beta^2 f(z) = 0$ où $\beta$ est un paramètre à exprimer en fonction de $k$ (vecteur d'onde).

**C.4** Montrer alors que la perturbation de la pression <u>réelle</u> s'écrit $\tilde{p}(x,z,t) = p_1 e^{kz}\cos\left(\omega t - kx\right)$ où l'on ne cherchera pas à déterminer la constante $p_1$.

**C.5** En traduisant la continuité de la pression de part et d'autre de l'interface eau/air déformée et dans l'hypothèse où $e^{ka}\approx 1$, montrer que $a = \dfrac{p_1}{\rho g}$.

**C.6** En reprenant l'équation $\rho\dfrac{\partial \underline{\vec{v}}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}\,\underline{\tilde{p}}$, montrer que la composante selon $z$ du champ de vitesse vaut $\underline{v_z} = -\dfrac{1}{j\omega\rho}h(z)e^{j(\omega t-kx)}$ où l'on explicitera $h(z)$ en fonction de $z, p_1, k$.

**C.7** Quelle est la relation entre $\xi(x,t)$ et la composante selon $z$ du gradient de champ de pression à l'interface eau/air ? En déduire que $\omega = \left(g\cdot k\right)^{\alpha}$ où l'on précisera la valeur numérique de $\alpha$.

**C.8** Par analyse dimensionnelle, retrouver l'expression précédente $\omega = \left(g\cdot k\right)^{\alpha}$ en précisant la valeur numérique de $\alpha$.

**C.9** Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe des ondes de gravité en fonction de $g$ et du vecteur d'onde $k$. Quelle est la relation simple qui relie la vitesse de phase à la vitesse de groupe ?

---