# Corrigé du devoir test de physique n° 6

¤ **Problème A** (Centrale-Supélec PSI 2013)

**I.A.1)** La corde sans raideur n'exerce aucune opposition à la torsion : ainsi, la tension en chaque point est tangente à la corde, et il n'y a pas de couple de torsion. L'hypothèse des petits mouvements suppose que le déplacement $|y(x,t)|$ reste toujours très petit devant la longueur de la corde ; par conséquent, l'angle local $\alpha(x,t)$ entre l'axe $(Ox)$ et la corde reste toujours très petit devant 1.

**I.A.2)** On applique le PFD à une portion de corde de longueur $\mathrm{d}x$ : $\mathrm{d}m\,\vec{a} = -\vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+\mathrm{d}x,t)$. Projection sur $\overrightarrow{e_y}$ : $\mu\,\mathrm{d}x\dfrac{\partial v_y(x,t)}{\partial t} = -T_y(x,t) + T_y(x+\mathrm{d}x,t)$ soit en divisant par $\mathrm{d}x$, $\boxed{\mu\dfrac{\partial v_y}{\partial t} = \dfrac{\partial T_y}{\partial x}}$. Projection sur $\overrightarrow{e_x}$ : $0 = -T_x(x,t) + T_x(x+\mathrm{d}x,t)$ [le mouvement étant négligeable dans cette direction] soit $\dfrac{\partial T_x}{\partial x} = 0$. Ainsi $T_x$ garde la même valeur sur toute la corde ; de plus $T_x = T\cos\alpha \approx T$ donc la norme $T$ a partout la même valeur $T_0$, imposée par les conditions aux limites (constantes au cours du temps).

Enfin, la tension étant tangente à la corde : $\dfrac{T_y}{T_x} = \tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ donc $T_y = T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}$. On dérive par rapport à $t$ : $\boxed{\dfrac{\partial T_y}{\partial t} = T_0\dfrac{\partial v_y}{\partial x}}$.

**I.A.3)** La première équation s'écrit encore : $\mu\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial T_y}{\partial x}$. En injectant $T_y = T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}$ on obtient : $\boxed{\mu\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$.

Cette équation peut se mettre sous la forme canonique de l'équation de D'Alembert : $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$ en posant $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}}$.

On retrouve cette équation pour les ondes acoustiques dans un solide ou dans un fluide, les ondes électromagnétiques dans le vide…

**I.A.4)** La tension est égale au poids d'une masse de 85 kg, soit $\boxed{T_0 = mg = 830\ \mathrm{N}}$.

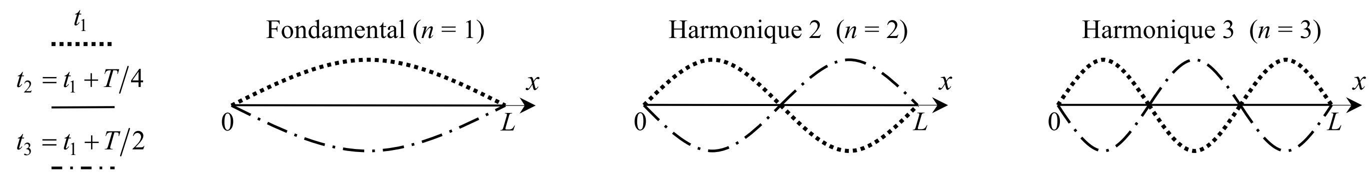
La masse linéique est égale à la masse volumique multipliée par la section $s = \pi\dfrac{d^2}{4}$, donc $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{4T_0}{\pi d^2\rho}}}$. AN $\boxed{c = 340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

**I.B.1)** Une onde stationnaire est une onde dont les dépendances temporelle et spatiale sont découplées : son expression réelle est de la forme $y(x,t) = f(x)\times g(t)$. On injecte cette forme dans l'équation de D'Alembert : $f''(x)g(t) - \dfrac{1}{c^2}f(x)g''(t) = 0$. Pour résoudre il faut séparer les variables, en mettant tous les $x$ dans le membre de gauche et tous les $t$ dans celui de droite : $c^2\dfrac{f''(x)}{f(x)} = \dfrac{g''(t)}{g(t)}$. Ceci ne peut être qu'une constante, puisque ça ne dépend ni de $t$ (d'après le premier membre), ni de $x$ (d'après le second). Donc $\dfrac{g''(t)}{g(t)} = A$, soit $g''(t) - Ag(t) = 0$. Si $A > 0$, la solution est de la forme $g(t) = \alpha\exp\left(+\sqrt{A}\,t\right) + \beta\exp\left(-\sqrt{A}\,t\right)$ donc diverge au cours du temps : ceci est incompatible avec la situation étudiée (petites oscillations) : nécessairement $A < 0$, et on pose $A = -\omega^2$. La solution est alors : $g(t) = \alpha\cos(\omega t + \varphi)$ [ou bien $g(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$]. Pour la partie spatiale, l'équation devient : $f''(x) + \dfrac{\omega^2}{c^2}f(x) = 0$, d'où la solution $f(x) = \gamma\cos(kx + \psi)$ en posant $\boxed{k = \dfrac{\omega}{c}}$. Finalement, on pose $y_0 = \alpha\gamma$, d'où : $\boxed{y(x,t) = y_0\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)}$.

**I.B.2)** Les modes propres sont les ondes stationnaires pouvant exister en régime libre (absence d'excitation extérieure). Les fréquences propres sont les fréquences des modes propres (que l'on trouve à partir des conditions aux limites).

Ici $y(0,t) = y_0\cos(\omega t + \varphi)\cos\psi = 0, \forall t$ donc $\cos\psi = 0$ : on peut prendre $\psi = -\pi/2$, d'où $y(x,t) = y_0\cos(\omega t + \varphi)\sin(kx)$.

Ensuite $y(L,t) = y_0\cos(\omega t + \varphi)\sin(kL) = 0, \forall t$ soit $\sin(kL) = 0$. Donc $k$ ne peut prendre que la série de valeurs : $k_n = n\dfrac{\pi}{L}$, d'où $\omega_n = n\dfrac{\pi c}{L}$ et $\boxed{f_n = n\dfrac{c}{2L}}$. On obtient alors : $\boxed{y_n(x,t) = y_{0,n}\cos\left(n\dfrac{\pi c}{L}t + \varphi_n\right)\sin\left(n\dfrac{\pi}{L}x\right)}$. Sur les schémas ci-dessous, l'instant $t_1$ est celui où le cosinus vaut 1 ; après un quart de période il vaut 0, puis après encore un quart de période il vaut –1.




**I.C.1)** D'après la question **I.B.2**, $f = f_1 = \dfrac{c}{2L}$ soit $\boxed{L\times f = \dfrac{c}{2}}$ qui est une constante si les cordes ont la même célérité (mêmes $T_0$ et $\mu$). Ainsi, à partir d'une corde on peut trouver les longueurs des autres : $\boxed{L_{\text{la0}} = L_{\text{do4}}\dfrac{f_{\text{do4}}}{f_{\text{la0}}} = 6{,}1\ \mathrm{m}}$ et $\boxed{L_{\text{do8}} = L_{\text{do4}}\dfrac{f_{\text{do4}}}{f_{\text{do8}}} = 4{,}1\ \mathrm{cm}}$.

**I.C.2)** Pour régler la fréquence fondamentale d'une corde, au lieu d'agir sur sa longueur on peut agir sur la célérité $c$, qui dépend elle-même de la masse linéique $\mu$ et de la tension $T_0$ : $f = \dfrac{c}{2L} = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$. En enroulant un fil de cuivre autour de la corde d'acier, on augmente $\mu$ donc on diminue la fréquence sans avoir à augmenter la longueur $L$.

On pourrait aussi penser à diminuer $T_0$, mais on ne peut pas le faire de façon importante, car cela pourrait aller jusqu'à détendre une corde, et en tout cas cela pourrait entraîner une mauvaise répartition des contraintes sur le cadre du piano.

**I.C.3)** Cette fois la masse linéique est la somme de celles de l'acier et du cuivre : $\mu = \rho_{\text{acier}} s_{\text{acier}} + \rho_{\text{cuivre}} s_{\text{cuivre}}$ soit $\mu = \rho_{\text{acier}} \pi \dfrac{d^2}{4} + \rho_{\text{cuivre}} \pi \dfrac{(d+2e)^2 - d^2}{4} = 39 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$. Alors pour le la0 : $\boxed{L = \dfrac{1}{2f}\sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}} = 2{,}6 \text{ m}}$ (nettement inférieure à 6,1 m).

¤ **Problème B** (CCINP TSI 2017)

**Q35.** On calcule la longueur d'onde dans le vide : $\lambda = \dfrac{c}{f}$. AN $\lambda = 12{,}0$ cm. Les ondes centimétriques ont donc une longueur d'onde de l'ordre de quelques centimètres (ou ici plutôt de quelques dizaines de centimètres).

**Q36.** Il peut se produire des interférences entre les ondes d'un four et celles d'une liaison Wi-Fi : elles ont donc la même fréquence.

**Q37.** Dans le vide sans charges ni courants, les équations s'écrivent : $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 0}$ ; $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ ; $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}$ ; $\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$.

**Q38.** $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div}\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{0} - \Delta\vec{E} \Leftrightarrow -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta\vec{E}$ soit finalement $\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$.

**Q39.** On injecte la forme proposée : $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}x^2}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y} - k^2 E_0(x)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y} + \mu_0\varepsilon_0\omega^2 E_0(x)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y} = \vec{0}$ d'où après simplification : $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}x^2} + (\mu_0\varepsilon_0\omega^2 - k^2)E_0(x) = 0$ ou encore $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}x^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_0(x) = 0}$.

**Q40.** On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique si $\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$, soit $\boxed{\omega > kc}$.

**Q41.** Ici le champ électrique total est porté par $\overrightarrow{u_y}$, il est donc tangent aux deux parois indiquées. Comme la seule composante pouvant être discontinue est la composante normale, le champ électrique est continu en $x = 0$ et en $x = d$. Et puisqu'il est nul en $x = 0^-$ et $x = d^+$ (dans le métal des parois), il est également nul en $x = 0^+$ et $x = d^-$ (dans la cavité du four).

**Q42.** Les conditions aux limites sont donc $E_0(0)\cos(\omega t - kz) = 0, \forall z, \forall t$ soit $\boxed{E_0(0) = 0}$, et de même $\boxed{E_0(d) = 0}$.

**Q43.** La solution de l'équation différentielle est de la forme $E_0(x) = C\cos(k'x) + A\sin(k'x)$ avec $k' = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2}$. Les conditions aux limites donnent alors $E_0(0) = C = 0$, puis $E_0(d) = A\sin(k'd) = 0$ d'où $k'd = n\pi$. Finalement : $\boxed{E_0(x) = A\sin\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)}$.

Relation de dispersion : $k' = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \dfrac{n\pi}{d}$, soit $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{d^2}}$. Donc $k$ peut prendre les valeurs discrètes : $\boxed{k_n = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{d^2}}}$.

**Q44.** Pour que $k$ soit réel (propagation) il faut que : $\dfrac{\omega}{c} > \dfrac{n\pi}{d}$, soit $f > \dfrac{nc}{2d}$, donc au minimum $\boxed{f > \dfrac{c}{2d} = f_{\min}}$ (pour le mode 1).

AN $\boxed{f_{\min} = 0{,}42 \text{ GHz}}$. On a bien trouvé $\boxed{f_{\min} < f_{\text{four}} = 2{,}50 \text{ GHz}}$.

**Q45.** Vitesse de phase : $\boxed{v_{\varphi,n} = \dfrac{\omega}{k_n} = \dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{d^2}}} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{n^2\pi^2c^2}{d^2\omega^2}}}}$. Vitesse de groupe : $v_{g,n} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_n} = \left(\dfrac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\dfrac{\dfrac{2\omega}{c^2}}{2\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}}}\right)^{-1}$ soit $\boxed{v_{g,n} = c\sqrt{1 - \dfrac{n^2\pi^2c^2}{a^2\omega^2}}}$. On a donc trouvé $\boxed{v_{g,n}v_{\varphi,n} = c^2}$ (relation habituelle), avec $v_{g,n} < c$ (vitesse de l'énergie) et $v_{\varphi,n} > c$.

**Q46.** L'onde n'étant pas une OPPH, on ne peut pas utiliser la relation de structure $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$, il faut revenir à l'équation de Maxwell $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dfrac{\partial E_y}{\partial z}\overrightarrow{u_x} - \dfrac{\partial E_y}{\partial x}\overrightarrow{u_z} = kA\sin\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} - \dfrac{n\pi}{d}A\cos\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}$, d'où finalement $\boxed{\vec{B}(x,y,z,t) = -\dfrac{kA}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} - \dfrac{n\pi}{\omega d}A\cos\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}}$ (pas de terme stationnaire $\vec{C}(x,y,z)$ sans source).

**Q47.** Par définition : $\boxed{\vec{\Pi}(M,t) = \dfrac{\vec{E}(M,t)\wedge\vec{B}(M,t)}{\mu_0}}$. Avec les expressions trouvées, on calcule :

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0}A\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_y} \wedge \left[-\frac{kA}{\omega}\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} - \frac{n\pi}{\omega d}A\cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\sin(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}\right]$$

soit $\boxed{\vec{\Pi}(M,t) = \dfrac{A^2}{\mu_0}\left[-\dfrac{n\pi}{\omega d}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)\sin(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} + \dfrac{k}{\omega}\sin^2\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{u_z}\right]}$.

Moyenne temporelle : $\boxed{\left\langle \vec{\Pi}(M,t)\right\rangle = \dfrac{A^2}{\mu_0}\dfrac{k}{2\omega}\sin^2\left(\dfrac{n\pi x}{d}\right)\overrightarrow{u_z}}$ car $\left\langle \sin(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz)\right\rangle = 0$ et $\left\langle \cos^2(\omega t - kz)\right\rangle = \dfrac{1}{2}$. Ce vecteur, qui caractérise le transport d'énergie par l'onde (puissance surfacique), a bien la direction et le sens de la propagation de l'onde.

¤ **Problème C** (CCINP PSI 2011)

**C.1.** Pour une onde, l'ordre de grandeur des variations spatiales est la longueur d'onde $\lambda$, et l'ordre de grandeur des variations temporelles est la période $T$. Ainsi $\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\| \sim \dfrac{v^2}{\lambda}$ et $\left\|\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \sim \dfrac{v}{T}$, donc $\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\| \ll \left\|\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right\| \Leftrightarrow \dfrac{v^2}{\lambda} \ll \dfrac{v}{T} \Leftrightarrow \boxed{v \ll \dfrac{\lambda}{T} = c}$. (Dans ce cas, on considérera le terme $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ comme un infiniment petit d'ordre 2, alors que $\partial\vec{v}/\partial t$ est un IP d'ordre 1.)

**C.2.** À l'équilibre, $\vec{v} = \vec{0}$ donc il reste $\vec{0} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P_e$. Projections : $\dfrac{\partial P_e}{\partial x} = \dfrac{\partial P_e}{\partial y} = 0$ donc $P_e$ ne dépend que de $z$ ; $\dfrac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}z} = -\rho g$. On intègre : $P_e(z) = -\rho g z + P_e(0)$, avec $P_e(0) = P_0$ donc $\boxed{P_e(z) = P_0 - \rho g z}$.

**C.3.** Avec l'approximation ci-dessus, l'équation d'Euler devient : $\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P_e + \tilde{p}) = \cancel{\rho\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P_e} - \overrightarrow{\text{grad}}\,\tilde{p} \Leftrightarrow \boxed{\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\tilde{p}}$ (1) que l'on peut écrire aussi avec les grandeurs complexes. Par ailleurs, l'équation locale de conservation de la masse est : $\boxed{\text{div}\,\vec{v} = 0}$ pour un fluide incompressible. Prenons alors la divergence de l'équation (1) : $\text{div}\left(\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right) = -\text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\tilde{p}\right) \Leftrightarrow \rho\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\vec{v}\right) = -\Delta\tilde{p}$ soit $\Delta\tilde{p} = 0 = \dfrac{\partial^2\tilde{p}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\tilde{p}}{\partial z^2} = -k^2 f(z)e^{j(\omega t - kx)} + \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}e^{j(\omega t - kx)}$ d'où après simplification : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} - k^2 f(z) = 0}$. On a donc trouvé $\boxed{\beta = k}$.

**C.4.** Solution : $f(z) = Ae^{-kz} + Be^{+kz}$, d'où $\underline{p}(x,z,t) = \left[Ae^{-kz} + Be^{+kz}\right]e^{j(\omega t - kx)}$ et en notation réelle $\tilde{p}(x,z,t) = \left[Ae^{-kz} + Be^{+kz}\right]\cos(\omega t - kx)$. Or la profondeur étant considérée comme infinie, le terme $Ae^{-kz}$ diverge pour $z \to -\infty$ donc nécessairement $A = 0$, et il reste $\boxed{\tilde{p}(x,z,t) = p_1 e^{+kz}\cos(\omega t - kx)}$ en remplaçant la notation $B$ par $p_1$.

**C.5.** Continuité de la pression à la surface, en $z = \xi(x,t)$ : $P(x,\xi(x,t),t) = P_0 \Leftrightarrow P_0 - \rho g\xi(x,t) + p_1 e^{+k\xi}\cos(\omega t - kx) = P_0$. Avec l'approximation $e^{+k\xi} \approx 1$ on obtient $-\rho g a\cos(\omega t - kx) + p_1\cos(\omega t - kx) = 0$ d'où $\boxed{a = \dfrac{p_1}{\rho g}}$.

**C.6.** Projetons l'équation (1) sur $\vec{e_z}$ : $\rho j\omega\underline{v_z} = -kp_1 e^{+kz}e^{j(\omega t - kx)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{v_z}(z) = -\dfrac{1}{j\rho\omega}kp_1 e^{+kz}e^{j(\omega t - kx)}}$. On trouve donc $\boxed{h(z) = kp_1 e^{+kz}}$.

**C.7.** En $z = \xi(x,t)$, c'est-à-dire pratiquement en $z = 0$ avec l'approximation précédente, $\underline{v_z}(0) = \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{\rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\left(\dfrac{\mathrm{d}\tilde{p}}{\mathrm{d}z}\right)_{z=0}}$. On injecte les expressions des deux fonctions : $-\rho\omega^2\dfrac{p_1}{\rho g}\cos(\omega t - kx) = -k\,p_1\cos(\omega t - kx)$ d'où $\boxed{\omega = \sqrt{gk}}$. On a donc trouvé $\boxed{\alpha = 1/2}$.

**C.8.** $[\omega] = [T^{-1}]$, $[g] = [L\cdot T^{-2}]$ et $[k] = [L^{-1}]$, donc $[T^{-1}] = [T^{-2\alpha}]$, ce qui correspond bien à $\boxed{\alpha = 1/2}$.

**C.9.** Vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ soit $\boxed{v_\varphi = \sqrt{\dfrac{g}{k}}}$. Vitesse de groupe : $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{g}{2\sqrt{gk}}$ soit $\boxed{v_g = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}}}$. On a donc $\boxed{v_g = \dfrac{v_\varphi}{2}}$.

---