On3 – Corrigé des exercices 1, 2 (fin), 3 et 4

¤ Exercice 1

a) Formule établie dans le cours : $\underline{\gamma} = \dfrac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$ avec $\boxed{\gamma_0 = \dfrac{n^* \tau e^2}{m}}$. AN $\boxed{\gamma_0 = 6{,}5 \cdot 10^7 \ \mathrm{S \cdot m^{-1}}}$ (valeur habituelle).

b) Formule établie dans le cours : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0 \underline{\gamma}\omega = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\dfrac{\mu_0 n^* \tau e^2 \omega}{m(1 + j\omega\tau)}$ que l'on peut écrire $\boxed{\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - j\dfrac{\omega_\mathrm{p}^2 \tau}{\omega(1 + j\omega\tau)}\right)}$ en posant $\boxed{\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{n^* e^2}{\varepsilon_0 m}}}$. AN $\boxed{\omega_\mathrm{p} = 1{,}6 \cdot 10^{16} \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}}$. Sachant que $\dfrac{1}{\tau} = 3{,}7 \cdot 10^{13} \ \mathrm{s^{-1}}$, on trouve donc $\boxed{\dfrac{1}{\tau} \ll \omega_\mathrm{p}}$.

c) Ondes hertziennes : $f < 100 \ \mathrm{GHz}$ environ, soit $\omega < 6 \cdot 10^{11} \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Ces valeurs permettent bien d'écrire : $\boxed{\omega \ll 1/\tau \ll \omega_\mathrm{p}}$.

Dans la relation de dispersion, on peut alors négliger le terme $j\omega\tau$ devant 1, puis $\dfrac{\omega_\mathrm{p}^2 \tau}{\omega} = \dfrac{\omega_\mathrm{p}}{\omega}\omega_\mathrm{p}\tau \gg 1$. Il reste donc $\underline{k}^2 = -j\dfrac{\omega\omega_\mathrm{p}^2 \tau}{c^2}$.

Les racines carrées de $-j$ étant $\pm\dfrac{1-j}{\sqrt{2}}$ (vu dans le cours, partie 2.c), on obtient $\underline{k} = \dfrac{1-j}{\sqrt{2}}\dfrac{\omega_\mathrm{p}\sqrt{\omega\tau}}{c}$ soit $\underline{k} = \dfrac{1-j}{\delta}$ en posant $\delta = \dfrac{c\sqrt{2}}{\omega_\mathrm{p}\sqrt{\omega\tau}}$, ce qui est bien égal à la formule $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ vu dans le cours. La forme de l'onde est alors : $\vec{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}_0 \exp j(\omega t - z/\delta)\exp(-z/\delta)\vec{e_x}$ en complexes, d'où $\boxed{\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - z/\delta + \varphi)\exp(-z/\delta)\vec{e_x}}$ en réels. C'est une <u>onde plane progressive qui s'amortit</u> le long de sa direction de propagation (effet de peau).

d) Ondes lumineuses : $4 \cdot 10^{14} \ \mathrm{Hz} < f < 8 \cdot 10^{14} \ \mathrm{Hz}$, soit $3 \cdot 10^{15} \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} < \omega < 5 \cdot 10^{15} \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Ces valeurs permettent bien d'écrire : $\boxed{1/\tau \ll \omega < \omega_\mathrm{p}}$. Cette fois c'est le terme $j\omega\tau$ qui est prépondérant devant 1, donc $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)$ qui est un réel négatif : $\underline{k}$ est donc un imaginaire pur $-j/\delta'$. La forme de l'onde est alors : $\vec{\underline{E}}(M,t) = \underline{E}_0 \exp j(\omega t)\exp(-z/\delta')\vec{e_x}$ en complexes, d'où $\boxed{\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)\exp(-z/\delta)\vec{e_x}}$ en réels. C'est une <u>onde stationnaire qui s'amortit</u> le long de sa direction de propagation, appelée <u>onde évanescente</u>.

e) Ultraviolets : $8 \cdot 10^{14} \ \mathrm{Hz} < f < 3 \cdot 10^{16} \ \mathrm{Hz}$, soit $5 \cdot 10^{15} \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} < \omega < 2 \cdot 10^{17} \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Pour les ultraviolets proches, on a toujours $1/\tau \ll \omega < \omega_\mathrm{p}$ donc le comportement est celui de la lumière visible. Mais pour les ultraviolets lointains, $\boxed{1/\tau \ll \omega_\mathrm{p} < \omega}$. Alors $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \dfrac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\right)$ est un réel positif, donc k est un réel : $k = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{1 - \dfrac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}}$. La forme de l'onde est $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi)\vec{e_x}$: elle n'est pas amortie, <u>il n'y a pas d'absorption</u>. La vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \omega_\mathrm{p}^2/\omega^2}}$ dépend de ω : <u>il y a dispersion</u>.

f) Pour les rayons X et les rayons γ : $f > 3 \cdot 10^{16} \ \mathrm{Hz}$, soit $\omega > 2 \cdot 10^{17} \ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Pour une grande partie des rayons X et pour tous les rayons γ on peut donc écrire $\boxed{1/\tau \ll \omega_\mathrm{p} \ll \omega}$. La relation de dispersion se simplifie alors en $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$, soit $k = \dfrac{\omega}{c}$ comme dans le vide : il n'y a donc <u>ni absorption, ni dispersion</u>.

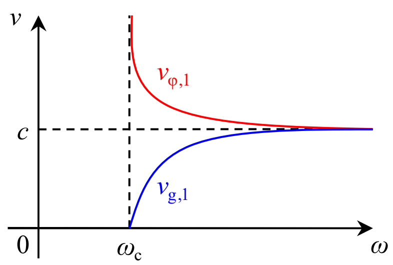
¤ Exercice 2 (fin)

d) *On a établi en classe :* $\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}}$. Donc $\boxed{k_n = \sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}}}$.

e) Pour qu'il y ait propagation il faut que k soit réel, donc au minimum $\dfrac{\omega^2}{c^2} > \dfrac{\pi^2}{a^2}$ soit $\omega > \dfrac{\pi c}{a} = \omega_\mathrm{c}$ et en fréquence : $\boxed{f > \dfrac{c}{2a} = f_\mathrm{c}}$.

AN $\boxed{f_\mathrm{c} = 15 \ \mathrm{GHz}}$: c'est le domaine des <u>ondes hertziennes</u>, et plus précisément des <u>micro-ondes</u>.

f) Vitesse de phase : $v_{\varphi,n} = \dfrac{\omega}{k_n} = \dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}}}$ soit $\boxed{v_{\varphi,n} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{n^2\pi^2 c^2}{a^2\omega^2}}}}$.



Vitesse de groupe : $v_{g,n} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_n} = \left(\dfrac{\mathrm{d}k_n}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\dfrac{\dfrac{2\omega}{c^2}}{2\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}}}\right)^{-1}$ soit $\boxed{v_{g,n} = c\sqrt{1 - \dfrac{n^2\pi^2 c^2}{a^2\omega^2}}}$.

On trouve bien $\boxed{v_{g,n}v_{\varphi,n} = c^2}$ (relation liée à l'équation de Klein–Gordon), avec $\boxed{v_{g,n} < c}$ (vitesse de l'énergie) et $v_{\varphi,n} > c$.

g) $\vec{\Pi}(M,t) = \dfrac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \dfrac{1}{\mu_0}E_\mathrm{m}\sin\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_z} \wedge \left[-\dfrac{n\pi}{a\omega}E_\mathrm{m}\cos\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kx)\vec{e_x} - \dfrac{k}{\omega}E_\mathrm{m}\sin\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\vec{e_y}\right]$

soit $\boxed{\vec{\Pi}(M,t)=\frac{1}{\mu_0}E_{\mathrm{m}}^2\left[-\frac{n\pi}{a\omega}\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin(\omega t-kx)\cos(\omega t-kx)\vec{e_y}+\frac{k}{\omega}\sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos^2(\omega t-kx)\vec{e_x}\right]}$.

Moyenne temporelle : $\boxed{\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle(M)=\frac{E_{\mathrm{m}}^2}{2\mu_0}\frac{k}{\omega}\sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\vec{e_x}}$. Ce vecteur est bien selon la direction de propagation de l'onde. Il est maximum au milieu du guide d'onde, puisque c'est là que l'amplitude de l'onde (transverse) est maximale.

¤ Exercice 3

a) Avec les hypothèses et approximations habituelles, le PFD pour un tronçon $\mathrm{d}x$ de corde donne, en projection sur $\vec{e_y}$:

$\mu\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=T\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t)-\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right)-\gamma\frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}\mathrm{d}x$ d'où, en utilisant $\alpha\approx\tan\alpha=\frac{\partial y}{\partial x}$: $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\gamma}{\mu}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}}$.

b) On injecte la forme cherchée dans l'équation et on simplifie : $-\omega^2=-\frac{T}{\mu}k^2-\frac{\gamma}{\mu}k^4$ soit $\boxed{k^4+\frac{T}{\gamma}k^2-\frac{\mu\omega^2}{\gamma}=0}$. C'est une équation du second degré pour k^2, dont le discriminant $\Delta=\frac{T^2}{\gamma^2}+\frac{4\mu\omega^2}{\gamma}$ est positif : il y a donc deux racines réelles, de signes opposés. La racine négative pour k^2 donnerait k imaginaire pur, c'est-à-dire une absence de propagation : ce n'est pas la solution recherchée. On retient donc la racine positive $k^2=-\frac{T}{2\gamma}+\sqrt{\frac{T^2}{4\gamma^2}+\frac{\mu\omega^2}{\gamma}}=\frac{T}{2\gamma}\left(\sqrt{1+\frac{4\gamma\mu\omega^2}{T^2}}-1\right)$, d'où $k=\sqrt{\frac{T}{2\gamma}\left(\sqrt{1+\frac{4\gamma\mu\omega^2}{T^2}}-1\right)}$ (en choisissant la valeur positive comme d'habitude, pour une propagation vers les x croissants).

Puisque k est réel, il n'y a pas d'absorption (en effet le phénomène ajouté ici n'entraîne pas de perte d'énergie dans la corde).

La vitesse de phase $v_\varphi=\frac{\omega}{k}$ dépend de ω : il y a donc dispersion.

c) On cherche maintenant une onde stationnaire de la forme $y(x,t)=A\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\psi)$. En injectant cette expression dans l'équation d'onde, on obtient toujours la même relation de dispersion, que l'on écrit plutôt maintenant sous la forme $\omega=\sqrt{\frac{T}{\mu}k^2+\frac{\gamma}{\mu}k^4}$. De façon habituelle, les deux conditions aux limites sont : $y(0,t)=0$, d'où $\cos\psi=0$, soit $\psi=(2n+1)\frac{\pi}{2}$; et $y(L,t)=0$, d'où $\sin(kL)=0$, soit $k_m=m\frac{\pi}{L}$. On en déduit $\boxed{\omega_m=\sqrt{\frac{T}{\mu}\left(m\frac{\pi}{L}\right)^2+\frac{\gamma}{\mu}\left(m\frac{\pi}{L}\right)^4}}$. Les fréquences des modes propres ne sont donc pas des multiples de la fréquence fondamentale : la raideur rend la corde légèrement *anharmonique*.

d) On trouve $\boxed{\omega_1=\sqrt{\frac{T}{\mu}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2+\frac{\gamma}{\mu}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4}=3976\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$ avec quatre chiffres significatifs. Si on néglige la raideur, on calcule $\boxed{\omega_1'=\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}=3974\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$: la différence est de 0,05 %, ce qui peut être considéré comme imperceptible à l'oreille. Cependant l'écart entre les pulsations avec ou sans raideur augmente lorsque m augmente.

¤ Exercice 4

a) Pour un champ de vitesse de la forme $\vec{v}=v_x(x,t)\vec{e_x}$, on trouve $\Delta\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{v}\right)=\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\vec{e_x}$. L'équation d'Euler linéarisée s'écrit donc : $\rho_0\frac{\partial v_x}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$. Avec les deux équations habituelles $\frac{\partial\mu}{\partial t}=-\rho_0\frac{\partial v_x}{\partial x}$ et $\mu=\chi_S\rho_0 p$, et avec la méthode habituelle, on obtient finalement : $\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}+\chi_S\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)\frac{\partial^3 p}{\partial x^2\partial t}=0}$ en posant toujours $c=\frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_S}}$.

b) On injecte la forme cherchée dans l'équation et on simplifie : $-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}-j\omega k^2\chi_S\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)=0$ que l'on peut écrire $\boxed{k^2=\frac{\omega^2}{c^2\left[1+j\omega\chi_S\left(\zeta+4\eta/3\right)\right]}}$. Le carré de k est complexe (non réel) donc k également.

c) On calcule $\chi_S\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)=\frac{1}{\rho_0 c^2}\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)=2{,}5\cdot10^{-10}\ \mathrm{s}$, donc pour les fréquences audibles ($f<20\ \mathrm{kHz}$ soit $\omega<1{,}3\cdot10^5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$) : $\omega\chi_S\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)<3\cdot10^{-5}\ll1$. On peut alors faire deux développements limités d'ordre 1 : $k^2\approx\frac{\omega^2}{c^2}\left[1-j\omega\chi_S\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)\right]$ puis $k\approx\frac{\omega}{c}\left[1-j\frac{\omega\chi_S}{2}\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)\right]$. On a donc obtenu $\boxed{k'=\frac{\omega}{c}}$ et $\boxed{k''=\frac{\omega^2\chi_S}{2c}\left(\zeta+\frac{4\eta}{3}\right)}$.

d) La forme de l'onde est donc finalement : $\boxed{\underline{p}(x,t)=\underline{A}\exp j(\omega t-k'x)\exp(-k''x)}$ en complexes, d'où

$\boxed{p(x,t) = A\cos(\omega t - k'x + \varphi)\exp(-k''x)}$ en réels. La vitesse de phase est $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k'} = c$, indépendante de ω : il n'y a pas de dispersion.

e) $\delta = \dfrac{1}{k''} = \dfrac{2c}{\omega^2 \chi_S \left(\zeta + 4\eta/3\right)} = \dfrac{c}{2\pi^2 f^2 \chi_S \left(\zeta + 4\eta/3\right)}$ soit $\boxed{\delta = \dfrac{c}{2\pi^2 f^2 \chi_S \left(\zeta + 4\eta/3\right)}}$. AN $\boxed{\delta = \dfrac{1}{k''} = 6900\ \text{km}}$ pour $f = 100\ \text{Hz}$, et $\boxed{\delta = \dfrac{1}{k''} = 690\ \text{m}}$ pour $f = 10\ \text{kHz}$. L'effet d'amortissement par viscosité est donc totalement négligeable pour des sons graves, mais il peut être sensible à grande distance pour des sons aigus.
